VẤN ĐỀ I:
Chứng minh Bất đẳng thức bằng phương pháp đổi biến số

1. Dự đoán được điều kiện đẳng thức xảy ra

Ví dụ 1: Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng: B = $a^5+b^5\ge 2$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.
Do vậy ta đặt: $a=1+x$. Từ giả thiết suy ra: $b=1-x$, ($x\in$ R).

Ta có: B = $a^5+b^5=(1+x)^5+(1-x)^5=10x^4+20x^2+2\ge 2$

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = 0, hay a = b = 1. Vậy B $\ge$ 2.

Ví dụ 2: Cho $a+b=3,\ a\le 1$. Chứng minh rằng: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b\ge 0$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = 1; b = 2.
Do vậy ta đặt $a=1-x$, với $x\ge 0$. Từ giả thiết suy ra $b=2+x$.

Ta có: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b = (2+x)^3-(1-x)^3-6(2+x)^2-(1-x)^2+9(2+x)$

$= x^3-2x^2+x = x(x-1)^2\ge 0$ (vì $x\ge 0$).

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = 0 hoặc x = 1 tức a = 1, b = 2 hoặc a = 0, b = 3. Vậy C $\ge$ 0.

Ví dụ 3: Cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\ge 6$.

• *Nhận xét*: Dự đoán rằng đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.
Do vậy ta đặt: $a=1+x,\ b=1+y$, ($x,y\in$ R). Từ giả thiết suy ra: $c=1-x-y$.

Ta có: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$= (1+x)^2+(1+y)^2+(1-x-y)^2+(1+x)(1+y)+(1+y)(1-x-y)+(1-x-y)(1+x)$

$= x^2+xy+y^2+6 = \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+6\ge 6$

Đẳng thức xảy ra ⇔ y = 0 và $x+\frac{1}{2}y=0$ ⇔ x = y = 0 hay a = b = c =1. Vậy A $\ge$ 6.

Ví dụ 4: Cho $a+b=c+d$. Chứng minh rằng: D = $a^2+b^2+ab\ge 3cd$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = c = d.
Do vậy đặt: $a=c+x$, với $x\in$ R. Từ giả thiết suy ra $b=d-x$.

Ta có: D = $(c+x)^2+(d-x)^2+(c+x)(d-x) = c^2+d^2+x^2+cd+cx-dx$

$= \left(c^2+d^2+\frac{1}{4}x^2-2cd+cx-dx\right)+3cd+\frac{3}{4}x^2 = \left(c-d+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2+3cd\ge 3cd$.

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = 0 và $c-d+\frac{1}{2}x=0$ ⇔ x = 0 và c = d hay a = b = c = d.

Vậy D $\ge$ 3cd.

Ví dụ 5: Cho $a+b\ge 2$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3\le a^4+b^4$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.
Do vậy đặt $a=1+x,\ b=1+y$. Từ giả thiết suy ra $x+y\ge 0$.

Ta có: $a^3+b^3 \le a^4+b^4 \Leftrightarrow (1+x)^3+(1+y)^3 \le (1+x)^4+(1+y)^4$

$\Leftrightarrow (1+x)^4+(1+y)^4-(1+x)^3-(1+y)^3 \ge 0 \Leftrightarrow x(1+x)^3+y(1+y)^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow x+y+3(x+y)(x^2-xy+y^2)+3(x^2+y^2)+x^4+y^4 \ge 0$ (Đúng vì $x+y \ge 0$)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = 0 hay a = b = 1. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a $\le$ 4. Chứng minh rằng: E = $a^2(2-a)+32 \ge 0$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = 4.

Do vậy đặt $a=4-x$. Từ giả thiết suy ra $x \ge 0$.

Ta có: E = $(4-x)^2(2-4+x)=x^3-10x^2+32x=x\left[(x-5)^2+7\right] \ge 0$.

Đẳng thức xảy ra x = 0 hay a = 4. Vậy E $\ge$ 0 .

Ví dụ 7: Cho ab $\ge$ 1. Chứng minh rằng: $a^2+b^2 \ge a+b$.

• *Nhận xét*: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

Do vậy đặt $a=1+x;\ b=1+y$.

Ta có: ab $\ge$ 1 $\Leftrightarrow (1+x)(1+y) \ge 1 \Leftrightarrow x+y+xy \ge 0$

Mặt khác: $a^2+b^2 \ge a+b \Leftrightarrow (1+x)^2+(1+y)^2 \ge (1+x)+(1+y) \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y \ge 0$

Lại có: $x^2+y^2 \ge 2xy$, với mọi x, y nên ta có:

$$x^2+y^2+x+y \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+x+y \ge 0 \text{ (Đúng vì } xy+x+y \ge 0)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = 0 hay a = b = 1. Vậy BĐT được chứng minh.

2. Dạng cho biết điều kiện của tổng các biến nhưng không (hoặc khó) dự đoán điều kiện của biến để đẳng thức xảy ra.

Đối với loại này ta cũng có thể đổi biến như trên.

Ví dụ 8: Cho a $\le$ 1; a + b $\ge$ 3. Chứng minh rằng: F = $3a^2+b^2+3ab-\frac{27}{4} \ge 0$

• Đặt a = 1– x và a + b = 3 + y. Từ giả thiết suy ra x, $y \ge 0$ nên ta có: b = 2 + x + y.

Từ đó : F = $3(1-x)^2+(2+x+y)^2+3(1-x)(2+x+y)-\frac{27}{4} = x^2+y^2-5x+7y-xy+\frac{25}{4}$

$$=\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{2}y \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ và y = 0 hay a = $-\frac{3}{2}$ và b = $\frac{9}{2}$.

Vậy bất đẳng thức F $\ge$ 0 được chứng minh.

Ví dụ 9: Cho a, b, c $\in [1; 3]$ và a + b + c = 6. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2 \le 14$ b) $a^3+b^3+c^3 \le 36$

• Đặt a = x + 1; b = y + 1; c = z + 1. Khi đó $x, y, z \in [0; 2]$ và $x+y+z=3$

Giả sử $x=\max\{x; y; z\}$ suy ra: $x+y+z=3 \le 3x \Rightarrow 1 \le x \le 2 \Rightarrow (x-1)(x-2) \le 0$

nên: $x^2+y^2+z^2 \le x^2+(y+z)^2=x^2+(3-x)^2=5+2(x-1)(x-2) \le 5$

Tức là: $x^2+y^2+z^2 \le 5$ (*). Tương tự ta chứng minh được $x^3+y^3+z^3 \le 9$ (**)

a) Ta có: $a^2+b^2+c^2=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2= x^2+ y^2+ z^2+2(x+y+z)+3$ (1)

Thay (*) vào (1) ta có: $a^2+b^2+c^2\le 14$ là điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$a^3+b^3+c^3=(x+1)^3+(y+1)^3+(z+1)^3=x^3+y^3+z^3+3(x^2+y^2+z^2)+3(x+y+z)+9$ (2)

Thay (*) và (**) vào (2) ta có: $a^3+b^3+c^3\le 36$ là điều phải chứng minh.

Ví dụ 10: Cho các số thực a, b với a + b $\neq$ 0. Chứng minh: $a^2+b^2+\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)^2\ge 2$.

• Đặt $c=-\dfrac{1+ab}{a+b}$. Ta có: ab + bc + ca = –1 và lúc này BĐT cần chứng minh trở thành:

$$a^2+b^2+c^2\ge 2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge -2(ab+bc+ca)\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 0 \quad \text{(luôn đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

3. Dạng bất đẳng thức với điều kiện cho ba số có tích bằng 1

$\boxed{\text{Cách1}}$: Đặt $a=\dfrac{x}{y};\ b=\dfrac{y}{z};\ c=\dfrac{z}{x}$, với $x, y, z\neq 0$.

Sau đây là một số ví dụ làm sáng tỏ điều này.

Ví dụ 11: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge \frac{3}{2}$$

• *Nhận xét*: a, b, c là các số thực dương và abc = 1 nên ta đặt:

$a=\dfrac{x}{y};\ b=\dfrac{y}{z};\ c=\dfrac{z}{x}$, với x, y, z là các số thực dương.

Ta có: $$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge \frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}+1\right)}+\frac{1}{\frac{y}{z}\left(\frac{z}{x}+1\right)}+\frac{1}{\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}+1\right)}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{xy+zx}+\frac{zx}{yz+xy}+\frac{xy}{zx+yz}\ge\frac{3}{2}$$

Đây chính là BĐT Néb–sít cho ba số dương xy, yz, zx, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 12: (Ôlimpic quốc tế 2000) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn abc = 1.

Chứng minh rằng: $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\le 1$.

• *Nhận xét*: a, b, c là các số thực dương thoả mãn abc = 1, nên ta đặt:

$a=\dfrac{x}{y};\ b=\dfrac{y}{z};\ c=\dfrac{z}{x}$, với x, y, z là các số thực dương.

Ta có: $$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1\Leftrightarrow \frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz}\le 1$$

$$\Leftrightarrow (x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\le xyz \quad (*)$$

Đặt $x=m+n;\ y=n+p;\ z=p+m$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow (m+n)(n+p)(p+m)\ge 8mnp$ (**)

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương ta có: $m+n\ge 2\sqrt{mn};\ n+p\ge 2\sqrt{np};\ p+m\ge 2\sqrt{pm}$

Ba bất đẳng thức trên có hai vế đều dương nên nhân vế theo vế ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý: Ta có thể chứng minh (*) theo cách sau đây:

Do vai trò x, y, z có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát nên giả sử : $x \geq y \geq z > 0$.

Như vậy $x - y + z > 0$ và $y - z + x > 0$.

+ Nếu $z - x + y \leq 0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

+ Nếu $z - x + y > 0$, áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương ta có:

$$\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)} \leq x\,; \quad \sqrt{(y-z+x)(z-x+y)} \leq y\,; \quad \sqrt{(z-x+y)(x-y+z)} \leq z$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, suy ra (*).

Vậy (*) đúng cho mọi x, y, z là các số thực dương, suy ra bài toán được chứng minh.

Phát hiện: **Việc đổi biến và vận dụng (**) một cách khéo léo giúp ta giải được bài toán ở Ví dụ 13 sau đây:**

Ví dụ 13: (Ôlimpic quốc tế 2001) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

• Đặt $x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}};\ y = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}};\ z = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$.

Ta thấy x, y, z đều dương và BĐT cần chứng minh trở thành $S = x + y + z \geq 1$.

Do $x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \Rightarrow x^2 = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 = \dfrac{a^2}{a^2+8bc} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} - 1 = \dfrac{8bc}{a^2}$.

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{y^2} - 1 = \dfrac{8ca}{b^2};\ \dfrac{1}{z^2} - 1 = \dfrac{8ab}{c^2}$.

Suy ra: $\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right) = 8^3$ (1)

Mặt khác nếu $S = x + y + z < 1$

thì: $T = \left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right) > \left(\dfrac{S^2}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{S^2}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{S^2}{z^2}-1\right)$

– Ta thấy $(S - x)(S - y)(S - z) = (x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$ (theo (**) ở ví dụ 12) (2)

– Với ba số dương $x + y, y + z, z + x$, ta lại có $(S+x)(S+y)(S+z) \geq 64xyz$ (3)

– Nhân (2) và (3) vế với vế, ta được: $(S^2 - x^2)(S^2 - y^2)(S^2 - z^2) \geq 8^3 x^2y^2z^2$

hay: $\left(\dfrac{S^2}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{S^2}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{S^2}{z^2}-1\right) \geq 8^3$

Từ đây suy ra: $T > 8^3$ mâu thuẫn với (1).

Vậy $S = x + y + z \geq 1$, tức bài toán được chứng minh.

Ngược lại, đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức mà các biểu thức (hoặc biến đổi của nó) có chứa các biểu thức có dạng: $\frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x}$, với $x, y, z \neq 0$. Lúc này việc đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$, với $abc = 1$ là một phương pháp hữu hiệu, sau đây là các ví dụ minh chứng điều này:

Ví dụ 14: Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng:

1) $\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\le 1$ 2) $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\ge 1$.

1) BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\le 1$.

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}$. Ta có *x*, y, z là các số thực dương có tích $xyz = 1$.

Suy ra: $\frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le 1$

$\Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) + (y + 2)(z + 2) + (z + 2)(x + 2) \le (x + 2)(y + 2)(z + 2)$

$\Leftrightarrow (xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 12 \le xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 8$

$\Leftrightarrow 4 \le xyz + xy + yz + zx \Leftrightarrow 3 \le xy + yz + zx$.

Đây là bất đẳng thức đúng vì áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho ba số dương ta có:

$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3$. Suy ra điều phải chứng minh.

2) *Cách 1*: Chứng minh tương tự câu 1).

Cách 2: Ta có: $2\left(\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\right)+\left(\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\right)=3$

Áp dụng kết quả bài toán 1), ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2: Ngoài cách đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$ như trên ta còn có cách đổi biến khác. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 15: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $abc = 1$.Chứng minh:

$$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}-\frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)}\le\frac{1}{4}\qquad (*)$$

• Đặt: $x=\frac{1-a}{1+a};\ y=\frac{1-b}{1+b};\ z=\frac{1-c}{1+c} \Rightarrow -1<x, y, z<1$ và $a=\frac{1-x}{1+x};\ b=\frac{1-y}{1+y};\ c=\frac{1-z}{1+z}$.

Từ $abc = 1 \Rightarrow (1 - x)(1 - y)(1 - z) = (1 + x)(1 + y)(1 + z) \Rightarrow x + y + z + xyz = 0$.

Mặt khác: $\frac{4a}{(a+1)^2}=1-x^2;\ \frac{2}{a+1}=1+x$

Tương tự: $\frac{4b}{(b+1)^2}=1-y^2;\ \frac{2}{b+1}=1+y$ và $\frac{4c}{(c+1)^2}=1-z^2;\ \frac{2}{c+1}=1+z$

nên: $(*) \Leftrightarrow \frac{4a}{(a+1)^2}+\frac{4b}{(b+1)^2}+\frac{4c}{(c+1)^2}\le 1+2.\frac{2}{(a+1)}.\frac{2}{(b+1)}.\frac{2}{(c+1)}$

$\Leftrightarrow 1-x^2+1-y^2+1-z^2\le 1+2(1+x)(1+y)(1+z)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2(x+y+z+xyz)\ge 0 \Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 0$.

Đây là bất đẳng thức luôn đúng nên bài toán được chứng minh.

Phát hiện: **Việc đổi biến bằng cách đặt $a=\dfrac{x}{y};\ b=\dfrac{y}{z};\ c=\dfrac{z}{x}$ ở đây còn áp dụng được rất hay ở bài toán chứng minh đẳng thức, ví dụ 16; 17 sau đây cho thấy điều này. (Việc đưa ra hai ví dụ sau nhằm nhấn mạnh thêm tính đa dạng và hữu hiệu của phương pháp đổi biến trong giải toán nói chung).**

Ví dụ 16: Cho *a, b,* c là ba số thực thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$$

• *Nhận xét*: Vì abc = 1 nên ta có thể đặt $a=\dfrac{x}{y};\ b=\dfrac{y}{z};\ c=\dfrac{z}{x}$, với *x, y, z* $\neq 0$.

Khi đó vế trái của đẳng thức trên được biến đổi thành:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}}+\frac{1}{1+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=\frac{yz}{xy+yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz+zx}+\frac{xy}{xy+yz+zx}=1 \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 17: Cho *a, b,* c là ba số thực thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(b+1-\frac{1}{c}\right)\left(c+1-\frac{1}{a}\right) \qquad (*)$$

• *Nhận xét*: Tương tự trên ta đặt $a=\dfrac{x}{y};\ b=\dfrac{y}{z};\ c=\dfrac{z}{x}$, với *x, y, z* $\neq 0$.

Khi đó vế trái của đẳng thức (*) được biến đổi thành:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)=\frac{x-y+z}{y}.\frac{y-z+x}{z}.\frac{z-x+y}{x}$$

$$=\frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz} \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng biến đổi được vế phải của (*) về biểu thức (1), suy ra đpcm.

4. Đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức chứa ba biến a, b, c không âm có vai trò như nhau ta có thể sử dụng phương pháp đổi biến như sau:

Đặt $x=a+b+c$; $\quad y=ab+bc+ca$; $\quad z=abc$.

Ta có các đẳng thức sau:

$$xy-z=(a+b)(b+c)(c+a) \qquad (1)$$

$$x^2+y=(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b) \qquad (2)$$

$$x^2-2y=a^2+b^2+c^2 \qquad (3)$$

$$x^3-3xy+3z=a^3+b^3+c^3 \qquad (4)$$

Cùng với việc áp dụng các bất đẳng thức sau:

$$x^2\geq 3y \qquad (5)$$

$$x^3\geq 27z \qquad (6)$$

$$y^2\geq 3xz \qquad (7)$$

$$xy\geq 9z \qquad (8)$$

$$x^3-4xy+9z\geq 0 \qquad (9)$$

(Bạn đọc tự chứng minh các bất đẳng thức trên).

Sau đây là một số ví dụ để làm sáng tỏ vấn đề này:

Ví dụ 18: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(1+a+b+c)$$

• Đặt $x = a+b+c$; $y = ab+bc+ca$; $z = abc$.

Theo (1) thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$xy - z \geq 2(1+x) \Leftrightarrow xy - 1 \geq 2(1+x) \Leftrightarrow x(y-2) \geq 3.$$

Do $z = abc = 1$ nên theo (6) và (7) suy ra: $x \geq 3$; $y \geq 3$ suy ra: $x(y-2) \geq 3$ là BĐT đúng.

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = y = 3 hay a = b = c =1. Suy ra bài toán được chứng minh.

Ví dụ 19: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \geq 5$$

• Đặt $x = a+b+c$; $y = ab+bc+ca$; $z = abc$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$z + \frac{12}{y} \geq 5 \qquad (*)$$

Theo (9) kết hợp với $x = a + b + c = 3$ ta có: $27 - 12y + 9z \geq 0$.

Suy ra: $$z \geq \frac{4y-9}{3} \Rightarrow z + \frac{12}{y} \geq \frac{4y-9}{3} + \frac{12}{y} \qquad (**)$$

Mặt khác: $\frac{4y-9}{3} + \frac{12}{y} \geq 5 \Leftrightarrow 4y^2 - 9y + 36 \geq 15y \Leftrightarrow (y-3)^2 \geq 0$ (đúng với mọi y).

Từ (*) và (**) suy ra bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c =1.

Ví dụ 20: Cho ba số không âm a, b, c, thoả mãn: $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh:

$$3(a^2+b^2+c^2) + abc \geq 10 \qquad (*)$$

• Đặt $x = a+b+c$; $y = ab+bc+ca$; $z = abc$.

Do $y + z = ab + bc + ca + abc = 4$, nên theo (3) bất đẳng thức (*) trở thành:

$$3(x^2 - 2y) + z \geq 10 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 \geq 7y.$$

Mặt khác, theo (9) suy ra:

$$x^3 - 4xy + 9(y+z) \geq 9y \Rightarrow x^3 + 36 \geq 9y + 4xy \Rightarrow y \leq \frac{x^3+36}{4x+9}$$

Vậy để hoàn thành bài toán ta cần chứng minh: $3x^2 - 6 \leq 7.\frac{x^3+36}{4x+9}$.

Thật vậy, từ (5) và (6) suy ra:

$$4 = y + z \leq \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} \Rightarrow x^3 + 9x^2 - 108 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x^2+12x+36) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3.$$

Từ đó ta có: $$3x^2 - 6 \leq 7.\frac{x^3+36}{4x+9} \Leftrightarrow 12x^3 - 24x + 27x^2 - 54 \geq 7x^3 + 252$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-3)(5x^2+42x+102) \geq 0$$

Đây là bất đẳng thức đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c = 1.

Ví dụ 21: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 3. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{6}+\frac{3}{a+b+c}$$

• Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca=3$; $z=abc$.

Ta có: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{6}+\frac{3}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{a+b+c}{6}+\frac{3}{a+b+c} \quad (*)$$

Theo (1) và (2) thì (*) trở thành:

$$\frac{x^2+y}{xy-z}\ge\frac{x}{6}+\frac{3}{x}\Leftrightarrow (x^2+3)6x-(x^2+18)(3x-z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^3+18x-3x^3-54x+x^2z+18z\ge 0 \Leftrightarrow 3x^3-36x+x^2z+18z\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^3-12x+9z)+x^2z-9z\ge 0 \qquad \Leftrightarrow 3(x^3-4xy+9z)+z(x^2-9)\ge 0$$

Do y = 3 nên từ (5) suy ra $x^2\ge 9$, kết hợp (9) ta có bất đẳng thức trên đúng, suy ra bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra ⇔ a = b = c = 1.

Ví dụ 22: Cho ba số a, b, c thuộc (0; 1) thoả mãn $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$. Chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+5abc\ge 1$$

• Ta có: $abc=(1-a)(1-b)(1-c) = 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$.

Do vậy, nếu đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca=3$; $z=abc$ thì ta có: $2z=1-x+y$.

Theo (9) thì ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x^3-3xy+3z+5z\ge 1 \Leftrightarrow x^3-3xy+8z\ge 1 \Leftrightarrow x^3-4x+3\ge y(3x-4)$$

Chú ý rằng: $1-x+y=2z\ge 0$ và $x^2\ge 3y$ suy ra: $x-1<y<\frac{x^2}{3}$.

Ta xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $x\le 1$ thì $x^3-4x+3=(1-x)(3-x-x^2)\ge 0>y(3x-4)$.

Trường hợp 2: Nếu $1<x<\frac{4}{3}$ thì: $3x-4<0$ và $0<x-1<y$, suy ra:

$$(x^3-4x+3)-y(3x-4)>(x^3-4x+3)-(x-1)(3x-4)=(x-1)^3>0$$

Trường hợp 3: Nếu $x\ge\frac{4}{3}$ thì:

$$(x^3-4x+3)-y(3x-4)>(x^3-4x+3)-\frac{x^2}{3}(3x-4)=\frac{(2x-3)^2}{2}\ge 0$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $x^3-4x+3\ge y(3x-4)$ luôn đúng, suy ra bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c = $\frac{1}{2}$.

II. Các bài tập áp dụng :

Bài 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Cho a, b > 0 thoả mãn a + b = 1. Chứng minh: $\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}\ge 14$.

b) Cho a + b + c + d = 1. Chứng minh: $(a+c)(b+d)+2(ac+bd)\le \frac{1}{2}$.

c) Cho a + b + c $\geq$ 3. Chứng minh: $a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$.

d) Cho a + b > 8 và b ≥ 3. Chứng minh: $27a^2+10b^3>945$.

Bài 2: Cho a, b, c là các số dương và $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$. Chứng minh: 8abc $\leq$ 1

Bài 3: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn abc = 1. Chứng minh:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 5(a + b + c) - 7$$

Bài 4: Cho các số dương a, b, c sao cho abc = 1. Chứng minh:

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3$$

Bài 5: Cho các số dương a, b, c sao cho abc = 1. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge \frac{3}{2}(a+b+c-1)$.

Bài 6: Cho ba số a, b, c không âm thoả mãn: a + b + c = 1. Chứng minh:

$$0\le 27(ab+bc+ca)-54abc\le 7$$

Bài 7: Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh:

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\ge (1+a)(1+b)(1+c)-2(1+abc)$$

VẤN ĐỀ II:
Chứng minh Bất đẳng thức bằng cách sử dụng vai trò như nhau của các biến

Ví dụ 1: Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0 \qquad (*)$$

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

+ Nếu có hai trong ba số *a, b, c* bằng nhau thì BĐT hiển nhiên đúng.

+ Nếu $a > b > c$, chia hai vế của (*) cho $(a-b)(b-c)(a-c)$ ta được BĐT tương đương:

$$\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}+\frac{c}{a-b}\ge 0 \qquad (1)$$

(1) luôn đúng do $\begin{cases} a>b>0 \\ 0<b-c<a-c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b-c}>\frac{b}{a-c}$ và $\frac{c}{a-b}>0$.

Ví dụ 2: Cho các số thực *a, b, c* đôi một khác nhau thuộc đoạn [0; 2]. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge \frac{9}{4} \qquad (*)$$

• Sử dụng BĐT Cô-si với $x > 0$, $y > 0$, ta có: $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x+y)^2\ge 2.\frac{1}{xy}.4xy=8$.

Suy ra: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge \frac{8}{(x+y)^2}$ (1). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a > b > c$. Áp dụng BĐT (1) cho cặp số dương $a - b$ và $b - c$, ta có: $\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2} \ge \dfrac{8}{(a-b+b-c)^2}=\dfrac{8}{(a-c)^2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a - b = b - c$.

Suy ra: $\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2} \ge \dfrac{8}{(a-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}=\dfrac{9}{(a-c)^2}$.

Mặt khác, do $a, c \in [0; 2]$ và $a > c$ nên $0 < a - c \le 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$ và $c = 0$.

Do đó: $\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2} \ge \dfrac{9}{(a-c)^2} \ge \dfrac{9}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c) = (2; 1; 0)$ và các hoán vị.

Ví dụ 3: Cho ba số dương *a, b, c* thoả mãn: $a+b+c+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c \ge ab+bc+ca$$

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Từ giả thiết ta có: $3c+c^3 \le 4 = a+b+c+abc \le 3a+a^3 \Rightarrow a \ge 1$ và $c \le 1$.

+ Nếu $a \ge b \ge 1 \ge c$ thì $4 \ge a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \le 4$. Do đó:

$$(a+b-2)^2 \ge 4(a-1)(b-1) \ge ab(a-1)(b-1)$$

$$\Leftrightarrow (a+b-ab)(ab+1) \ge (4-a-b)(a+b-1) \Leftrightarrow a+b-ab \ge \frac{4-a-b}{ab+1}(a+b-1) \quad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $c=\dfrac{4-a-b}{ab+1}$. Kết hợp với (1) ta có:

$$a+b-ab \ge c(a+b-1) \Leftrightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca \quad \text{(đpcm)}.$$

+ Nếu $a \ge 1 \ge b \ge c$ thì ta có $(a-1)(b-1)(c-1) \ge 0 \Rightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca+1-abc \quad (2)$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cô-si cho các số dương, ta có:

$$4 = a+b+c+abc \ge 4\sqrt[4]{abcabc} \Rightarrow abc \le 1.$$

Kết hợp với (2) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 4: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Vì $abc = 1$ nên $bc \le 1$ và $a \ge 1$. Ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right) = 2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+b^2)(1+c^2)}\right) \le 2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+bc)^2}\right)$$

$$=\frac{4}{1+bc}=\frac{4a}{1+a}$$

Suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le 2\sqrt{\dfrac{a}{1+a}} \quad (1)$

Mặt khác ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \le \dfrac{\sqrt{2}}{1+a} \quad (2)$

Ta sẽ chứng minh: $2\sqrt{\dfrac{a}{1+a}}+\dfrac{\sqrt{2}}{1+a}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (3)

Thật vậy, (3) $\Leftrightarrow 1+3a-2\sqrt{2a(1+a)}\ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2a}-\sqrt{1+a}\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$$

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a\ge b\ge c$. Suy ra $c\le 1$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2+abc=9-2(ab+bc+ca)+abc = 9+ab(c-2)-2c(3-c)$.

Lại có: $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2$ và $c-2<0$ nên

$$a^2+b^2+c^2\ge 9+(c-2)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2-2c(3-c) \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh: $9+(c-2)\left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2-2c(3-c)\ge 4$ (2)

Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow (c-1)^2(c+2)\ge 0$ (luôn đúng).

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 6: Cho *a, b, c* là các số thực không âm thoả mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca\le 2+abc$$

• Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a=max\{a, b, c\}$. Xét hai khả năng:

+ Với $a\ge b\ge c\ge 0$. Khi đó:

$$a(b-a)(b-c)\le 0\Leftrightarrow a^2b+abc\ge ab^2+ca^2 \Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le a^2b+bc^2+abc \quad (1)$$

Mà $a^2b+bc^2-2=b(3-b^2)-2=-(b-1)^2(b+2)\le 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

+ Với $a\ge c\ge b\ge 0$. Khi đó:

$$b(c-a)(c-b)\le 0\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le ca^2+cb^2+abc \quad (3)$$

Lại có: $ca^2+cb^2-2=c(3-c^2)-2=-(c-1)^2(c+2)\le 0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a;b;c)=(1;1;1),\left(\sqrt{2};0;1\right),\left(0;1;\sqrt{2}\right),\left(1;\sqrt{2};0\right)$.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho *a, b, c* là các số thực không âm, thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca-3abc\ge\frac{1}{4}.$$

Bài 2: Cho *a, b, c* là các số thực không âm, thoả mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$abc+2\ge ab+bc+ca\ge abc.$$

Bài 3: Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn $[-1; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\left|(a-b)(b-c)\right|+\left|(b-c)(c-a)\right|+\left|(c-a)(a-b)\right|\ge\frac{5}{2}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Bài 4: Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 10.$$

Bài 5: Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn [0; 1]. Chứng minh rằng:

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a) \le 1.$$

VẤN ĐỀ III:
Chứng minh Bất đẳng thức có chứa biến ở mẫu

I. Một số phương pháp

1. Sử dụng hai bất đẳng thức cơ bản sau:

Với a, b, c là ba số thực dương tuỳ ý, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \quad (1) \qquad\qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c} \quad (2)$$

Ví dụ 1: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc} \ge 16 \qquad (*)$$

• Áp dụng (1) ta có: $\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}=\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \ge \dfrac{4}{c(a+b)} \ge \dfrac{4}{\left(\dfrac{c+a+b}{2}\right)^2}=16$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}, a=b=\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c \le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca} \ge 670.$$

• Áp dụng (2), ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{9}{(a+b+c)^2} \ge 1 \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có: $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \Rightarrow \dfrac{2007}{ab+bc+ca} \ge \dfrac{3.2007}{(a+b+c)^2} \ge 669 \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

2. Đặt mẫu là các biến mới

Ví dụ 3: Cho ba số thực dương *x, y, z*. Chứng minh rằng: $\dfrac{25x}{y+z}+\dfrac{4y}{z+x}+\dfrac{9z}{x+y} > 12 \quad (*)$

• Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y$ (với $a>0, b>0, c>0$).

Suy ra: $x=\dfrac{b+c-a}{2}, y=\dfrac{c+a-b}{2}, z=\dfrac{a+b-c}{2}$.

Ta có: VT (*) = $\dfrac{25(b+c-a)}{2a}+\dfrac{4(c+a-b)}{2b}+\dfrac{9(a+b-c)}{2c}$

$$=\left(\frac{25b}{2a}+\frac{4a}{2b}\right)+\left(\frac{25c}{2a}+\frac{9a}{2c}\right)+\left(\frac{4a}{2b}+\frac{9b}{2c}\right)-19 \geq 10+15+6-19=12.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}5b=2a\\5c=3a\end{cases} \Rightarrow 5b+5c=5a \Rightarrow x=0$ (vô lí). Vậy BĐT (*) đúng.

3. Đánh giá nghịch đảo

Ví dụ 4: Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

• Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $2\sqrt{\dfrac{b+c-a}{a}} \leq \dfrac{b+c-a}{a}+1=\dfrac{b+c}{a} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b+c-a}} \geq \dfrac{2a}{b+c}$.

Tương tự: $\sqrt{\dfrac{b}{c+a-b}} \geq \dfrac{2b}{a+c}$; $\sqrt{\dfrac{c}{a+b-c}} \geq \dfrac{2c}{a+b}$

Ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ là xong.

4. Đưa về đồng bậc

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn: $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

• Ta có: $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right)$.

Tương tự: $\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}\right)$, $\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a+c}+\dfrac{c}{b+c}\right)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Thêm bớt biểu thức để khử mẫu

Ví dụ 6: Cho ba số thực dương *x, y, z* thoả mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx). \qquad (*)$$

• Ta có: $\dfrac{x^3}{y^3+8}+\dfrac{y+2}{27}+\dfrac{y^2-2y+4}{27} \geq \dfrac{x}{3} \Rightarrow \dfrac{x^3}{y^3+8} \geq \dfrac{9x+y-y^2-6}{27}$.

Tương tự: $\dfrac{y^3}{z^3+8} \geq \dfrac{9y+z-z^2-6}{27}$; $\dfrac{z^3}{x^3+8} \geq \dfrac{9z+x-x^2-6}{27}$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta có:

$$\text{VT } (*) \geq \frac{10(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)-18}{27}=\frac{12-(x^2+y^2+z^2)}{27}=$$

$$= \frac{3+(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{27} = \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx) \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=y=z=1$.

Ví dụ 7: Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

• Ta có: $\dfrac{a}{1+b^2} = \dfrac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a-\dfrac{ab^2}{1+b^2} \ge a-\dfrac{ab}{2}$.

Tương tự: $\dfrac{b}{1+c^2} \ge b-\dfrac{bc}{2}$; $\quad \dfrac{c}{1+a^2} \ge c-\dfrac{ac}{2}$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh: $a+b+c-\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge \dfrac{3}{2}$.

Từ BĐT $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$ suy ra $ab+bc+ca \le 3$.

Do đó: $a+b+c-\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge \dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

6. Đánh giá mẫu

Ví dụ 8: Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{1}{5}(a+b+c) \qquad (*)$$

• Ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \le \dfrac{1}{2}(4a+6b) = 2a+3b$.

Tương tự với các mẫu số còn lại. Từ đó:

$$\text{VT }(*) \ge \frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2a+3b+2b+3c+2c+3a} = \frac{1}{5}(a+b+c) \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

Ví dụ 9: Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1. \qquad (*)$$

• Trước hết ta chứng minh BĐT: $x^5+y^5 \ge x^2y^2(x+y)$ (1) với mọi $x > 0, y > 0$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3(x^2-y^2)+y^3(y^2-x^2) \ge 0 \Leftrightarrow (x^3-y^3)(x^2-y^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^2+xy+y^2) \ge 0$ (luôn đúng với mọi $x > 0, y > 0$).

Do đó: $\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab} \le \dfrac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \dfrac{1}{ab(a+b)+abc} = \dfrac{1}{ab(a+b+c)}$.

Tương tự: $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc} \le \dfrac{1}{bc(a+b+c)}$; $\quad \dfrac{ca}{c^5+a^5+ca} \le \dfrac{1}{ca(a+b+c)}$.

Suy ra: VT (*) $\le \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=1$. (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

II. Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho ba số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^3}{a^6+bc}+\frac{2b^3}{b^6+ca}+\frac{2c^3}{c^6+ab}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}.$$

Bài 2: Cho ba số thực dương *x, y, z* thảo mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge\frac{51}{7}.$$

Bài 3: Cho hai số *a, b* dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{P}=\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}.$$

Bài 4: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}\le1.$$

Bài 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}.$$

Bài 6: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{M}=\frac{a^5}{b^3+c^2}+\frac{b^5}{c^3+a^2}+\frac{c^5}{a^3+b^2}+a^4+b^4+c^4.$$

Bài 7: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}.$$

Bài 8: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)}+\frac{b^5+c^5}{bc(b+c)}+\frac{c^5+a^5}{ca(c+a)}\ge3(ab+bc+ca)-2.$$

Bài 9: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc\ge1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right)\ge\frac{27}{8}.$$

Bài 10: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c.$$

VẤN ĐỀ IV:
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TỪ NHỮNG BÀI TOÁN TRONG TAM GIÁC

Mở đầu: Trong chứng minh bất đẳng thức, đặc biệt là các bài toán có biến ràng buộc bởi một hệ thức cho trước thoạt nhìn chúng ta cứ nghĩ đó là bài toán đại số thuần tuý nhưng nếu biết biến đổi linh hoạt điều kiện để chuyển bài toán về dạng lượng giác thì cách giải sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Qua bài viết này tác giả mong muốn gửi đến các em học sinh một phương pháp mà từ trước đến nay thông thường các em ít nghĩ đến.

I. Khi nào thì có thể vận dụng bất đẳng thức trong tam giác?

- Từ điều kiện $a,b,c\in R^+$, $ab+bc+ca=1$ luôn tồn tại 3 góc của ΔABC sao cho:

$$a=\tan\frac{A}{2},\ b=\tan\frac{B}{2},\ c=\tan\frac{C}{2}$$

- Từ điều kiện $a,b,c\in R^+$, $ab+bc+ca=abc$ luôn tồn tại 3 góc của ΔABC sao cho:
$a=\tan A,\ b=\tan B,\ c=\tan C$

- Từ điều kiện $a,b,c\in R^+$, $a^2=b^2+c^2-\alpha bc$ (*) với $\alpha\in(0;2)\Rightarrow$ Tồn tại ΔABC có 3 góc thoả mãn điều kiện (*) và ta dễ dàng tính được góc A thông qua định lý hàm số côsin……..

- Từ điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1,\ a,b,c\in[-1;1]$ luôn tồn tại:
a = cosA, b = cosB, c = cosC với $A+B+C=\pi$

II. Một số kết quả cơ bản

- Khi ta đặt $a=\tan\frac{A}{2}\Rightarrow \sin A=\frac{2a}{1+a^2};\cos A=\frac{1-a^2}{1+a^2};\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}};\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

- a, b, c$\in R^+$, ab + bc + ca = 1

$\Rightarrow 1+a^2=(a+b)(a+c),\qquad 1+b^2=(b+c)(b+a),\qquad 1+c^2=(c+a)(c+b)$ (1)

- a, b$\in R^+\Rightarrow \frac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\le 1$ (2)

Thật vậy (2) tương đương với $(1+ab)^2\le(1+a^2)(1+b^2)\Leftrightarrow 2ab\le a^2+b^2$

- $a,b,c\in R^+,ab+bc+ca=1\Rightarrow \frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}\le\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ (3)

Thật vậy trước hết ta chứng minh:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$$

$\Leftrightarrow \frac{a(b+c)+b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{1+ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ (Áp dụng kết quả (1))

$\Leftrightarrow a(b+c)+b(c+a)=1+ab\Leftrightarrow ab+bc+ca=1$

Vì $\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}\le 1\Rightarrow$ đpcm

- $a,b,c\in R^+,ab+bc+ca=1\Rightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}\le\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$

Thật vậy trước hết ta chứng minh $\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}=\frac{2c(1+ab)}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$

Sau đó dùng kết quả (2), ta có điều phải chứng minh.

III. Nhìn bài toán bằng con mắt lượng giác:

• Ta thấy (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}+\frac{ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\le 1$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\le 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)\le 1$$

Rõ ràng bất đẳng thức này luôn đúng.

• Ta thấy (3) $\Leftrightarrow \sin A+\sin B\le 2\cos\frac{C}{2}$

Nhưng ta có: $\sin A+\sin B=2\cos\frac{C}{2}.\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\le 1 \Rightarrow$ đpcm.

• Ta thấy (4) $\Leftrightarrow \cos A+\cos B\le 2\sin\frac{C}{2}$

Nhưng ta có: $\cos A+\cos B=2\sin\frac{C}{2}.\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\le 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bây giờ ta sẽ chứng minh các bài toán phức tạp hơn.

Bài 1. Cho $a,b,c>0, ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}\le\sqrt{10}$ (1)

• Ta thấy (1) $\Leftrightarrow \sin A+\sin B+6\sin\frac{C}{2}\le 2\sqrt{10}$.

Lại có $\sin A+\sin B\le 2\cos\frac{C}{2}$, nên ta sẽ chứng minh $3\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\sqrt{10}$.

Theo BĐT Bunhiacopxki $\left(3\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2\le(9+1)\left(\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)=10 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 2. Cho $a,b,c>0, abc+a+c=b$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{1+a^2}-\frac{2}{1+b^2}+\frac{3}{1+c^2}\le\frac{10}{3}$ (2)

• Đây là bài toán khó nhưng nhìn kỹ các bạn sẽ thấy $abc+a+c=b\Leftrightarrow ac+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=1$.

Từ đó ta đặt $a=\tan\frac{A}{2}$, $\frac{1}{b}=\tan\frac{B}{2}$, $c=\tan\frac{C}{2}$.

(2) $\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{B}{2}+3\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{10}{3}\Leftrightarrow(\cos A+1)-(1-\cos B)+3\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right)\le\frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}.\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-3\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{1}{3} \qquad (*)$$

Vì $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\le 1 \Rightarrow VT\ (*)\le 2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}$

Ta sẽ chứng minh:

$$2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}-\frac{1}{3}\le 0\Leftrightarrow -3\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\le 0.$$

Điều này là hiển nhiên $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 3. Cho *x, y, z* là các số dương thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$. Chứng minh rằng:

$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 5(y+z)^3$ **(TSĐH 2009A)**

• Đặt a = x + y , b = y + z, c = z + x thì a, b, c là các số dương và

$$x=\frac{b+c-a}{2};\quad y=\frac{c+a-b}{2};\quad z=\frac{a+b-c}{2}$$

Bài toán trở thành: Cho *a, b, c* là các số dương thỏa mản $a^2=b^2+c^2-bc$. Chứng minh:

$$b^3+c^3+3abc\le 5a^3 \qquad (*)$$

Coi a, b, c như là 3 cạnh của tam giác, ta suy ra góc A = 60^0

Ta có $(*)\Leftrightarrow (b+c)(b^2-bc+c^2)+3abc=a^2(b+c)+3abc\le 5a^3$

$$\Leftrightarrow a(b+c)+3bc\le 5a^2 \qquad (**)$$

Vận dụng điều kiện góc A = 60^0 và các hệ thức a = 2Rsin A, b = 2RsinB, c= 2RsinC

Ta có (**) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sin B+\sin C)+12\sin B.\sin C\le 15$

Mặt khác ta có:

$$\sin B+\sin C\le 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sqrt{3},\quad \sin B\sin C\le\frac{(\sin B+\sin C)^2}{4}\le\frac{\left[2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]^2}{4}=\frac{3}{4}$$

Ta suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 4. Cho $a,b,c\ge 0, a^2+b^2+c^2+2abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c\ge abc+2$ (4)

• Từ giả thiết suy ra $a,b,c\in[0;2]$, do đó tồn tại A, B, C $\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho

a = 2cosA, b = 2cosB, c = 2cosC và $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Suy ra A, B, C là các đỉnh của tam giác nhọn ABC.

(4) $\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\ge 4\cos A.\cos B.\cos C+1$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge\cos A.\cos B.\cos C$$

Ta có $\cos A.\cos B\le\frac{(\cos A+\cos B)^2}{4}=\sin^2\frac{C}{2}.\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)\le\sin^2\frac{C}{2}$

Tương tự có 2 bất đẳng thức nữa. Sau đó nhân vế với vế, 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=xyz\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (5)

• Đặt x = tanA, y = tanB, z = tanC với A, B, C là 3 góc nhọn của tam giác ABC

thì (5) $\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Tacó $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right).\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \le 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

và $\sin C + \sin 60^0 \le 2\sin\left(\dfrac{C+60^0}{2}\right)$

Từ đó suy ra $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^0 \le 4\sin\left(\dfrac{A+B+C+60^0}{4}\right) = 4\sin 60^0 = \dfrac{4\sqrt{3}}{2}$

hay $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

VẤN ĐỀ V:
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
BẰNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC

* Để học sinh nắm kiến thức một cách hệ thống tôi (*tác giả*) đã lập bảng một số dấu hiệu nhận biết sau: (Giả sử các hàm số lượng giác sau đều có nghĩa)

Biểu thức đại số	**Biểu thức lượng giác tương tự**	**Công thức lượng giác**
$1+x^2$	$1+\tan^2 t$	$1+\tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$
$4x^3-3x$	$4\cos^3 t - 3\cos t$	$4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$
$2x^2-1$	$2\cos^2 t - 1$	$2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$
$\dfrac{2x}{1-x^2}$	$\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$	$\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \tan 2t$
$\dfrac{2x}{1-x^2}$	$\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$	$\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \sin 2t$
$\dfrac{x+y}{1-xy}$	$\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$	$\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} = \tan(\alpha+\beta)$
x^2-1	$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$	$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \tan^2\alpha$
...	....	......

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

I. DẠNG 1: *Sử dụng hệ thức* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

1. Phương pháp:

a) Nếu thấy $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$.

b) Nếu thấy $x^2 + y^2 = a^2$ (a > 0) thì đặt $\begin{cases} x = a\sin\alpha \\ y = a\cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$.

2. Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Cho 4 số *a, b, c, d* thoả mãn: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$-\sqrt{2} \le S = a(c+d) + b(c-d) \le \sqrt{2} \qquad (1)$$

• Đặt $\begin{cases} a = \sin u \\ b = \cos u \end{cases}$ và $\begin{cases} c = \sin v \\ d = \cos v \end{cases}$

$\Rightarrow$ S = $\sin u(\sin v + \cos v) + \cos u(\sin v - \cos v)$

$= (\sin u\cos v + \sin v\cos u) - (\cos u\cos v - \sin u\sin v) = \sin(u+v) - \cos(u+v)$

$= \sqrt{2}\sin\left[(u+v) - \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow -\sqrt{2} \le S = a(c+d) + b(c-d) \le \sqrt{2}$ (đpcm).

Ví dụ 2: Cho $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng: $\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \dfrac{1}{b^2}\right)^2 \ge \dfrac{25}{2}$ (2)

• Đặt $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$ với $0 \le \alpha \le 2\pi$.

$$\text{VT (2)} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 = \left(\cos^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^2 + \left(\sin^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)^2$$

$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \frac{1}{\cos^4\alpha} + \frac{1}{\sin^4\alpha} + 4 = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{\cos^4\alpha.\sin^4\alpha} + 4$$

$$= \left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^4\alpha.\sin^4\alpha}\right) + 4$$

$$= \left[\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2 - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right]\left(1 + \frac{1}{\cos^4\alpha.\sin^4\alpha}\right) + 4$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2\alpha}\right) + 4 \ge \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1+16) + 4 = \frac{17}{2} + 4 = \frac{25}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow |a| = |b| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bây giờ ta đẩy bài toán lên mức độ cao hơn một bước nữa để xuất hiện $a^2 + b^2 = 1$.

Ví dụ 3: Cho $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0$. Chứng minh rằng:

$$\text{A} = \left|a^2 - b^2 + 2\sqrt{3}ab - 2(1+2\sqrt{3})a + (4-2\sqrt{3})b + 4\sqrt{3} - 3\right| \le 2 \qquad (3)$$

• Biến đổi điều kiện: $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$.

Đặt $\begin{cases} a - 1 = \sin\alpha \\ b - 2 = \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + \sin\alpha \\ b = 2 + \cos\alpha \end{cases}$.

$\Rightarrow A = \left|\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\right|$

$= \left|\sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\right| = 2\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right| = 2\left|\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right| \le 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 4: Cho *a, b* thoả mãn : $\left|5a + 12b + 7\right| = 13$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 2(b-1) \ge -1$ (4)

• Biến đổi bất đẳng thức (4) $\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 \ge 1$

Đặt $\begin{cases} a - 1 = R\sin\alpha \\ b + 1 = R\cos\alpha \end{cases}$ với R ≥ 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = R\sin\alpha + 1 \\ b = R\cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2$

Ta có: $\left|5a + 12b + 7\right| = 13 \Leftrightarrow \left|5(R\sin\alpha + 1) + 12(R\cos\alpha - 1) + 7\right| = 13$

$\Leftrightarrow \left|5R\sin\alpha + 12R\cos\alpha\right| = 13 \Leftrightarrow 1 = R\left|\frac{5}{13}\sin\alpha + \frac{12}{13}\cos\alpha\right| = R\left|\sin\left(\alpha + \arccos\frac{5}{13}\right)\right| \le R$

Từ đó suy ra $(a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2 \ge 1$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{18}{13} \\ b = -\frac{1}{13} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = \frac{8}{13} \\ b = -\frac{25}{13} \end{cases}$.

II. DẠNG 2: *Sử dụng tập giá trị* $\left|\sin\alpha\right| \le 1; \quad \left|\cos\alpha\right| \le 1$

1. Phương pháp:

a) Nếu thấy $|x| \le 1$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = \sin\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = \cos\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in \left[0; \pi\right] \end{array}\right.$

b) Nếu thấy $|x| \le m$ ($m \ge 0$) thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = m\sin\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = m\cos\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in \left[0; \pi\right] \end{array}\right.$

2. Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $(1+x)^p + (1-x)^p \le 2^p$, với $|x| \le 1,\ p \ge 1$.

• Đặt *x* = cosα với α ∈ [0; π].

Khi đó $(1+x)^p + (1-x)^p = (1+\cos\alpha)^p + (1-\cos\alpha)^p$

$$= \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^p + \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^p = 2^p\left(\cos^{2p}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2p}\frac{\alpha}{2}\right) \le 2^p\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2^p$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $\sqrt{3} - 2 \le A = 2\sqrt{3}a^2 + 2a\sqrt{1-a^2} \le \sqrt{3} + 2$

- Từ đk $1 - a^2 \ge 0 \Leftrightarrow |a| \le 1$ nên đặt a = cosα với 0 ≤ α ≤ π ⇒ $\sqrt{1-a^2}$ = sinα.

Khi đó ta có:

$$A = 2\sqrt{3}a^2 + 2a\sqrt{1-a^2} = 2\sqrt{3}\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = \sqrt{3}(1+\cos 2\alpha) + \sin 2\alpha$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right] + \sqrt{3} = 2\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} - 2 \le A \le \sqrt{3} + 2 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\left[\sqrt{(1+a)^3} - \sqrt{(1-a)^3}\right] \le 2\sqrt{2} + \sqrt{2-2a^2}$ (1)

- Từ đk $|a| \le 1$ nên đặt a = cosα với α∈[0, π]

$$\Rightarrow \sqrt{1-a} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}; \quad \sqrt{1+a} = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \quad \sqrt{1-a^2} = \sin\alpha$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.2\sqrt{2}\left[\cos^3\frac{\alpha}{2} - \sin^3\frac{\alpha}{2}\right] \le 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \le 1 + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \le 1 \text{ đúng} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng: S = $\left|4\left(\sqrt{(1-a^2)^3} - a^3\right) + 3\left(a - \sqrt{1-a^2}\right)\right| \le \sqrt{2}$

Từ đk $|a| \le 1$ nên đặt a = cosα với α ∈ [0, π] ⇒ $\sqrt{1-a^2}$ = sinα.

Khi đó: S = $\left|4(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha) + 3(\cos\alpha - \sin\alpha)\right| = \left|(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\right|$

$$= \left|\sin 3\alpha + \cos 3\alpha\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(3\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng A = $\left|a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} + \sqrt{3}\left(ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)\right| \le 2$

- Từ điều kiện: $1 - a^2 \ge 0, 1 - b^2 \ge 0 \Rightarrow |a| \le 1, |b| \le 1$ nên:

Đặt $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ với $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó A = $\left|\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)\right|$

$$= \left|\sin(\alpha+\beta) - \sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)\right| = 2\left|\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha+\beta)\right|$$

$$= 2\left|\sin\left[(\alpha+\beta) - \frac{\pi}{3}\right]\right| \le 2 \qquad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng: A = $\left|4a^3 - 24a^2 + 45a - 26\right| \le 1$, $\forall a \in [1;3]$.

- Do $a \in [1; 3]$ nên $|a-2| \le 1$ nên ta đặt $a - 2 = \cos\alpha \Leftrightarrow a = 2 + \cos\alpha$.

Ta có: A = $\left|4(2+\cos\alpha)^3 - 24(2+\cos\alpha)^2 + 45(2+\cos\alpha) - 26\right| = \left|4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right|$

$$= \left|\cos 3\alpha\right| \le 1 \qquad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng: A = $\left|\sqrt{2a-a^2} - \sqrt{3}a + \sqrt{3}\right| \le 2$, $\forall a \in [0;2]$

- Do $a \in [0; 2]$ nên $|a-1| \le 1$ nên ta đặt $a - 1 = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$.

Ta có: A = $\left|\sqrt{2(1+\cos\alpha) - (1-\cos\alpha)^2} - \sqrt{3}(1+\cos\alpha) + \sqrt{3}\right| = \left|\sqrt{1-\cos^2\alpha} - \sqrt{3}\cos\alpha\right|$

$$= \left|\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha\right| = \left|2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)\right| = 2\left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right| \le 2 \qquad \text{(đpcm)}$$

III. DẠNG 3: *Sử dụng công thức:* $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad (\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi)$

1. Phương pháp:

a) Nếu $|x| \ge 1$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2-1}$

thì đặt $x = \frac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

b) Nếu $|x| \ge m$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2-m^2}$

thì đặt $x = \frac{m}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

2. Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng A = $\left|\frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{3}}{a}\right| \le 2$, $\forall |a| \ge 1$

• Do $|a| \geq 1$ nên đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{a^2-1} = \sqrt{\tan^2\alpha} = \tan\alpha$.

Khi đó:

$$A = \left|\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a}\right| = \left|\left(\tan\alpha+\sqrt{3}\right)\cos\alpha\right| = \left|\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\right| = 2\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right| \leq 2 \quad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $-4 \leq A = \dfrac{5-12\sqrt{a^2-1}}{a^2} \leq 9,\ \forall |a| \geq 1$

• Do $|a| \geq 1$ nên đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{a^2-1} = \sqrt{\tan^2\alpha} = \tan\alpha$.

Khi đó: $A = \dfrac{5-12\sqrt{a^2-1}}{a^2} = (5-12\tan\alpha)\cos^2\alpha = 5\cos^2\alpha - 12\sin\alpha\cos\alpha$

$$= \frac{5(1+\cos 2\alpha)}{2} - 6\sin 2\alpha$$

$$= \frac{5}{2}+\frac{13}{2}\left(\frac{5}{13}\cos 2\alpha - \frac{12}{13}\sin 2\alpha\right) = \frac{5}{2}+\frac{13}{2}\cos\left(2\alpha+\arccos\frac{5}{13}\right)$$

$$\Rightarrow -4 = \frac{5}{2}+\frac{13}{2}(-1) \leq A = \frac{5}{2}+\frac{13}{2}\cos\left(2\alpha+\arccos\frac{5}{13}\right) \leq \frac{5}{2}+\frac{13}{2}.1 = 9 \quad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $A = \left|\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}}{ab}\right| \leq 1,\quad \forall |a|, |b| \geq 1$.

• Do $|a|, |b| \geq 1$ nên đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $b = \dfrac{1}{\cos\beta}$ với $\alpha, \beta \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Khi đó ta có:

$$A = \left|(\tan\alpha+\tan\beta)\cos\alpha\cos\beta\right| = \left|\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\right| = \left|\sin(\alpha+\beta)\right| \leq 1 \quad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng: $a+\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}} \geq 2\sqrt{2},\ \forall |a| > 1$

• Do $|a| > 1$ nên đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}.\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Khi đó:

$$a+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha} \geq 2.\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}.\frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}} \geq 2\sqrt{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: $y\sqrt{x^2-1}+4\sqrt{y^2-1}+3 \le xy\sqrt{26}$, $\forall |x|;|y| \ge 1$ (*)

• Bất đẳng thức (*) $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{4\sqrt{y^2-1}}{y}+\dfrac{3}{y}\right) \le \sqrt{26}$ (1)

Do $|x|, |y| \ge 1$ nên đặt $x=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, $y=\dfrac{1}{\cos\beta}$ với α, β $\in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó: (1) ⇔ S = sinα + cosα(4sinβ + 3cosβ) $\le \sqrt{26}$

Ta có: S ≤ sinα + cosα $\sqrt{(4^2+3^2)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)} = \sin\alpha+5\cos\alpha$

$\le \sqrt{(1^2+5^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)} = \sqrt{26} \Rightarrow$ (đpcm)

IV. DẠNG 4: *Sử dụng công thức* $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

1. Phương pháp:

a) Nếu $x \in$ R và bài toán chứa $1+x^2$ thì đặt $x=\tan\alpha$ với α $\in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Nếu $x \in$ R và bài toán chứa x^2+m^2 thì đặt $x=m\tan\alpha$ với α $\in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: S = $\left|\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{4x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right| \le 1$

• Đặt $x=\tan\alpha$ với α $\in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Khi đó: S = $|3\tan\alpha.\cos\alpha-4\tan^3\alpha.\cos^3\alpha| = |3\sin\alpha-4\sin^3\alpha| = |\sin 3\alpha| \le 1$ (đpcm)

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: A = $\dfrac{3+8a^2+12a^4}{(1+2a^2)^2}$

• Đặt $a\sqrt{2}=\tan\alpha$ với α $\in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì ta có:

$$A = \frac{3+4\tan^2\alpha+3\tan^4\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^2} = \frac{3\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+3\sin^4\alpha}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2}$$

$$= 3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 3-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}=3-\frac{1}{2} \le A = 3-\frac{\sin^2 2\alpha}{2} \le 2-\frac{0}{2}=3$$

Với $\alpha = 0$ thì $a = 0 \Rightarrow \text{MaxA} = 3$; Với $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ thì $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{MinA} = \dfrac{5}{2}$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $\left|\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \le \dfrac{1}{2},\ \forall\ a, b \in \mathrm{R}$

• Đặt $a = \tan\alpha,\ b = \tan\beta$.

Khi đó $\left|\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| = \left|\dfrac{(\tan\alpha + \tan\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)}{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)}\right|$

$$= \left|\cos^2\alpha\cos^2\beta.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}.\frac{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}\right|$$

$$= \left|\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\right| = \frac{1}{2}\left|\sin\left[2(\alpha+\beta)\right]\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng: $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \dfrac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \ge \dfrac{|c-a|}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}},\ \forall a,b,c$

• Đặt $a = \tan\alpha,\ b = \tan\beta,\ c = \tan\gamma$. Khi đó:

BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{|\tan\alpha - \tan\beta|}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)}} + \dfrac{|\tan\beta - \tan\gamma|}{\sqrt{(1+\tan^2\beta)(1+\tan^2\gamma)}} \ge \dfrac{|\tan\gamma - \tan\alpha|}{\sqrt{(1+\tan^2\gamma)(1+\tan^2\alpha)}}$

$$\Leftrightarrow \left|\cos\alpha\cos\beta.\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\right| + \left|\cos\beta\cos\gamma.\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma}\right| \ge \left|\cos\gamma\cos\alpha.\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma.\cos\alpha}\right|$$

$$\Leftrightarrow |\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| \ge |\sin(\gamma-\alpha)|$$

Biến đổi biểu thức vế phải ta có:

$$|\sin(\gamma-\alpha)| = \left|\sin\left[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)\right]\right| = |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma) + \sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)| \le$$

$$\le |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)| + |\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)|$$

$$= |\sin(\alpha-\beta)|.|\cos(\beta-\gamma)| + |\sin(\beta-\gamma)|.|\cos(\alpha-\beta)|$$

$$\le |\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| \quad \text{(đpcm)}.$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \le \sqrt{(a+c)(b+d)},\ \forall a,b,c,d > 0$ (1)

• Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\dfrac{cd}{(a+c)(b+d)}} \le 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{d}{b}\right)}} + \frac{\sqrt{\frac{cd}{ab}}}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{d}{b}\right)}} \le 1 \qquad (2)$$

Đặt $\tan^2\alpha = \frac{c}{a}$, $\tan^2\beta = \frac{d}{b}$ với α, β ∈ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có VT (2) = $\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)}} + \frac{\sqrt{\tan^2\alpha.\tan^2\beta}}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)}}$

$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) \le 1 \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra ⇔ $\cos(\alpha-\beta) = 1$ ⇔ α = β ⇔ $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

Ví dụ 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{6a + 4\left|a^2-1\right|}{a^2+1}$

- Đặt $a = \tan\frac{\alpha}{2}$. Khi đó:

$$A = \frac{6\tan\frac{\alpha}{2} + 4\left|\tan^2\frac{\alpha}{2} - 1\right|}{\tan^2\frac{\alpha}{2} + 1} = 3.\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} + 4.\left|\frac{\tan^2\frac{\alpha}{2}-1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}\right| = 3\sin\alpha + 4\left|\cos\alpha\right|$$

$\ge 3\sin\alpha + 4.0 = 3\sin\alpha \ge 3(-1) = -3$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$A^2 = \left(3\sin\alpha + 4\left|\cos\alpha\right|\right)^2 \le (3^2+4^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 25 \Rightarrow A \le 5$ (2)

Dấu "=" ở (1) xảy ra ⇔ sinα = –1 ⇔ $a = -1$ ⇒ minA = –3.

Dấu "=" ở (2) xảy ra ⇔ $\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\left|\cos\alpha\right|}{4}$ ⇒ maxA = 5.

V. DẠNG 5: *Đổi biến số đưa về bất đẳng thức tam giác*

1. Phương pháp:

a) Nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \end{cases}$ thì $\exists \Delta ABC: \begin{cases} A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = \cos A; y = \cos B; z = \cos C \end{cases}$

b) Nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$ thì $\exists \Delta ABC: \begin{cases} A; B; C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = \tan A; y = \tan B; z = \tan C \end{cases}$

c) Nếu $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$ thì $\exists \Delta ABC: \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A,B,C\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \\ x=\cot A; y=\cot B; z=\cot C \end{cases} \\ \begin{cases} A,B,C\in(0;\pi) \\ x=\tan\dfrac{A}{2}; y=\tan\dfrac{B}{2}; z=\tan\dfrac{C}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

2. Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Cho *x, y, z* > 0 và *zy* + *yz* + *zx* = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3(x+y+z)$$

• Từ $0 < x, y, z < 1$ nên đặt $x=\tan\frac{\alpha}{2};\ y=\tan\frac{\beta}{2};\ z=\tan\frac{\gamma}{2}$ với α, β, γ ∈ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Do *xy* + *yz* + *zx* = 1 nên $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\cot\frac{\alpha}{2}$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi$$

$$S = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3(x+y+z) = \cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}-3\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \left(\cot g\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\cot g\frac{\beta}{2}-tg\frac{\beta}{2}\right)+\left(\cot\frac{\gamma}{2}-\tan\frac{\gamma}{2}\right)-2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= 2(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)-2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \left(\cot\alpha+\cot\beta-2\tan\frac{\gamma}{2}\right)+\left(\cot\beta+\cot\gamma-2\tan\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\cot\gamma+\cot\alpha-2\tan\frac{\beta}{2}\right)$$

Để ý rằng: $\cot\alpha+\cot\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}=\dfrac{2\sin\gamma}{2\sin\alpha.\sin\beta}=\dfrac{2\sin\gamma}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

$$\geq \frac{2\sin\gamma}{1-\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\gamma}{1+\cos\gamma}=\frac{4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}=2\tan\frac{\gamma}{2}\Rightarrow \cot\alpha+\cot\beta-2\tan\frac{\gamma}{2}\geq 0$$

Từ đó suy ra S ≥ 0. Dấu "=" xảy ra ⇔ $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ MinS = 0

Ví dụ 2: Cho $0 < x, y, z < 1$ và $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=x^2+y^2+z^2$.

• Do $0 < x, y, z < 1$ nên đặt $x = \tan\frac{\alpha}{2}$; $y = \tan\frac{\beta}{2}$; $z = \tan\frac{\gamma}{2}$ với α, β, γ $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó $\tan\alpha = \frac{2x}{1-x^2}$; $\tan\beta = \frac{2y}{1-y^2}$; $\tan\gamma = \frac{2z}{1-z^2}$

Và đẳng thức ở giả thiết trở thành:

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

$\Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$\Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta = -\tan\gamma(1-\tan\alpha\tan\beta) \Leftrightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} = \tan(-\gamma)$

$\Leftrightarrow \tan(\alpha+\beta) = \tan(-\gamma)$ (1)

Do α, β, γ $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên từ (1) suy ra $\alpha + \beta = \pi - \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$. Khi đó ta có:

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 1$$

Mặt khác: $(x^2+y^2+z^2) - (xy+yz+zx) = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geq 0$

$\Rightarrow S = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ MinS = 1.

Ví dụ 3: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: S = $\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \leq \frac{9}{4}$

Đặt $\sqrt{\frac{yz}{x}} = \tan\frac{\alpha}{2}$; $\sqrt{\frac{xz}{y}} = \tan\frac{\beta}{2}$; $\sqrt{\frac{xy}{z}} = \tan\frac{\gamma}{2}$ với α, β, γ $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra: $\cos\alpha = \frac{x-yz}{x+yz}$; $\cos\beta = \frac{y-zx}{y+zx}$; $\cos\gamma = \frac{z-xy}{z+xy}$.

Do $\sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{xy}{z}} + .\sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{yz}{x}} = x + y + z = 1$

nên $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \cot\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi$$

$$S = \frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2x}{x+yz}-1\right)+\left(\frac{2y}{y+zx}-1\right)+\left(\frac{2z}{z+xy}-1\right)\right]+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x-yz}{x+yz}+\frac{y-zx}{y+zx}+\frac{z-xy}{z+xy}\right)+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\Big[\big(\cos\alpha+\cos\beta\big)-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\Big]+\frac{3}{2}$$

$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\big((\cos\alpha+\cos\beta)^2+1\big)+\frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)-\cos\alpha\cos\beta\right]+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\big(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\big)+\big(\cos^2\beta+\sin^2\beta\big)+1\Big]+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4} \qquad \text{(đpcm)}$$

Chú ý: * $\cos\alpha+\cos\beta=(\cos\alpha+\cos\beta).1\le\frac{1}{2}\left[(\cos\alpha+\cos\beta)^2+1\right]$

* $\sin\alpha.\sin\beta\le\frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng: $\left|20a^3-15a+36b-48b^3\right|\le 13$.

Bài 2. Cho $(a-2)^2+(b-1)^2=5$. Chứng minh rằng: $2a+b\le 10$.

Bài 3. Cho $\begin{cases} a;b\ge 0 \\ a+b=2 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $a^4+b^2\ge a^3+b^3$

Bài 4. Cho *a, b, c* ≥ 1. Chứng minh rằng: $\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)\ge\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)$

Bài 5. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

a) $xyz\le\frac{1}{8}$ b) $xy+yz+zx\le\frac{3}{4}$ c) $x^2+y^2+z^2\ge\frac{3}{4}$

d) $xy+yz+zx\le 2xyz+\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\ge\sqrt{3}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$, $\forall$ *a, b* $\in$ (0; 1]

Bài 7. Chứng minh rằng: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$, $\forall$ *a, b, c* > 0.

Bài 8. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 9. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \dfrac{3}{2}$

Bài 10. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \ge \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

VẤN ĐỀ VI:
MỘT HƯỚNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. Cơ sở lí thuyết

Xuất phát từ bất đẳng thức $(a-b)^2 \ge 0, \forall a, b$ *(*)*
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

1 . Từ (*) ta suy ra: $a^2 + b^2 \ge 2ab, \ \forall a, b$ (1a)

Hay $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge ab, \forall a, b$ (1b)

$2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2, \ \forall a, b$ (1c)

$\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2, \ \forall a, b$ (1d)

2. Với *a, b* > 0. Chia 2 vế của (1a) cho *ab* ta được:

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$ (2)

3. Cộng 2 vế của (1a) với 2*ab* ta được $(a+b)^2 \ge 4ab$ Hay $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab$ (3)

Với *a, b* ≥0. Khai phương 2 vế ta được: $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (BĐT Cô–si với 2 số không âm)

4. Với *a, b* > 0, chia 2 vế của (3) cho *ab(a+b)*, ta được:

$\dfrac{a+b}{ab} \ge \dfrac{4}{a+b}$ (4)

Hay $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$, $\dfrac{1}{4a} + \dfrac{1}{4b} \ge \dfrac{1}{a+b}$

5. Với *a, b* > 0, nhân hai vế của (2) với *a* ta được:

$\dfrac{a^2}{b} + b \ge 2a$ (5a)

Hoặc nhân hai vế với *b*, ta được:

$$a+\frac{b^2}{a}\ge 2b \qquad (5b)$$

6. Với $a, b > 0$. Lấy nghịch đảo 2 vế của (1a) ta được:

$$\frac{1}{2ab}\ge\frac{1}{a^2+b^2} \qquad (6a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\ge\frac{a+b}{a^2+b^2} \qquad \text{(nhân 2 vế với } a+b \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{a+b}{a^2+b^2} \qquad (6b)$$

7. Với $a, b > 0$, từ (1) $\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\ge ab \Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$ (7)

8. Từ $(a-b)^2\ge 0, (b-c)^2\ge 0, (c-a)^2\ge 0$

Suy ra: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (8a)

Hay $3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$ (8b)

B. Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác (p là nửa chu vi). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

• Áp dụng (4), với $a, b > 0$ ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Từ đó: $$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c} \qquad (a)$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a} \qquad (b)$$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\ge\frac{4}{2p-a-c}=\frac{4}{b} \qquad (c)$$

Cộng (a), (b), (c), vế theo vế, ta được:

$$2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\ge a+b+c$$

Từ công thức (5) ta có: $\frac{a^2}{c}+c\ge 2a;\quad \frac{b^2}{a}+a\ge 2b;\quad \frac{c^2}{b}+b\ge 2c$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\ge a+b+c \qquad (1)$$

Tương tự : $$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2) ta được: $\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\ge a+b+c$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c$.

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

• Từ công thức (5) ta có:

$$\frac{(2a)^2}{b+c}+(b+c)\ge 2.2a=4a;\quad \frac{(2b)^2}{a+c}+(a+c)\ge 2.2b=4b;\quad \frac{(2c)^2}{b+c}+(a+b)\ge 2.2c=4c$$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được: $\frac{4a^2}{b+c}+\frac{4b^2}{a+c}+\frac{4c^2}{a+b}\ge 2(a+b+c)$

Chia 2 vế cho 4 ta được đpcm.

Bài 4. Cho $x > 0$. Chứng minh rằng: $\left(1+x\right)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)\ge 16$

• Từ (3) ta có: $(1+x)^2\ge 4x>0$ (a)

và $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)^2\ge 4\frac{1}{x}>0$ (b)

Nhân (a), (b), vế theo vế, suy ra đpcm.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = 1$.

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

• Từ (3) ta có $(a+b)^2\ge 4ab$. Chia 2 vế cho $ab(a+b)^2>0$, ta được: $\frac{1}{ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}$

Tương tự: $\frac{1}{ac}\ge\frac{4}{(a+c)^2}$; $\frac{1}{bc}\ge\frac{4}{(b+c)^2}$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\ge 4\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\ge 4.3\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right]\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

(theo (8))

Bài 6. Chứng minh rằng: $2(a^3+b^3+c^3)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$

• Từ (7) ta có: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$; $b^3+c^3\ge bc(b+c)$; $c^3+a^3\ge ac(a+c)$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$2(a^3+b^3+c^3)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+(a+c)\quad \text{(đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b= c$.

Bài 7. Cho $(x;\, y)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} ax - by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\quad P = xy$.

• Trước hết ta tính $x,\, y$.

Từ $ax = by \Rightarrow ax + ay = ay + by \Rightarrow a(x+y) = (a+b)y \Rightarrow y = \dfrac{a}{a+b} \Rightarrow x = \dfrac{b}{a+b}$

Khi đó: $\quad xy = \dfrac{ab}{(a+b)^2} \le \dfrac{1}{4}$

Suy ra: $\quad \text{Max}\, xy = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Cho $a,\, b,\, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+a+c} + \frac{1}{2c+a+b} \le \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}$$

• Từ (4) ta có: $\dfrac{4}{a+b} \le \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{4a+4b} \le \dfrac{1}{16a} + \dfrac{1}{16b}$

Suy ra $\quad \dfrac{1}{2a+(b+c)} \le \dfrac{1}{8a} + \dfrac{1}{4(b+c)} = \dfrac{1}{8a} + \dfrac{1}{4b+4c} \le \dfrac{1}{8a} + \dfrac{1}{16b} + \dfrac{1}{16c}$

Tương tự : $\dfrac{1}{2b+(a+c)} \le \dfrac{1}{8b} + \dfrac{1}{16a} + \dfrac{1}{16c}$; $\qquad \dfrac{1}{2c+(a+b)} \le \dfrac{1}{8c} + \dfrac{1}{16a} + \dfrac{1}{16b}$

Cộng vế với vế 3 bđt trên, rồi rút gọn ta có đpcm.

Bài 9. Cho $a,\, b,\, c > 0$ thoả mãn $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b}{2a-b} + \dfrac{c+b}{2c-b} \ge 4$

Từ giả thiết $\dfrac{2}{b} = \dfrac{a+c}{ac} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{2ac}{a+c}$

Suy ra: $\dfrac{a+b}{2a-b} = \dfrac{a + \dfrac{2ac}{a+c}}{2a - \dfrac{2ac}{a+c}} = \dfrac{a^2+3ac}{2a^2} = \dfrac{a+3c}{2a}$

Tương tự : $\dfrac{c+b}{2c-b} = \dfrac{c+3b}{2c}$

Do đó: $\dfrac{a+b}{2a-b} + \dfrac{c+b}{2c-b} = \dfrac{a+3c}{2a} + \dfrac{c+3a}{2c} = \dfrac{ac+3c^2+ca+3a^2}{2ac}$

$$= \frac{3(a^2+c^2)+2ac}{2ac} \ge \frac{3.2ac+2ac}{2ac} = \frac{8ac}{2ac} = 4 \qquad \text{(đpcm)}.$$

Bài 10. Cho $a,\, b,\, c > 0$ thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$a + b + 2c \ge 4(1-a)(1-b)(1-c)$$

• Từ $a + b + c = 1 \Rightarrow b + c = 1 - a$ và $0 \le c \le 1 \Rightarrow c^2 \le 1 \Rightarrow 1 \ge 1 - c^2 \ge 0$

Suy ra: $4(1-a)(1-b)(1-c) \le \left[(b+c)+(1-b)\right]^2(1-c) = (1+c)^2(1-c) = (1-c^2)(1+c)$

$\le 1+c = a+b+2c$ (đpcm).

Bài 11. Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3 \qquad (*)$$

• Đặt $x=b+c-a;\ y=c+a-b;\ z=a+b-c \Rightarrow x+y+z=a+b+c$

Suy ra: $a=\dfrac{y+z}{2}$; $b=\dfrac{z+x}{2}$; $c=\dfrac{x+y}{2}$

Ta có: $VT(*)=\dfrac{y+z}{2x}+\dfrac{z+x}{2y}+\dfrac{x+y}{2z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y}\right) \ge \dfrac{1}{2}(2+2+2)=3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$ hay ΔABC đều.

Bài 12. Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$abc \ge (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

• Tương tự bài 11 ta có: $x+y \ge 2\sqrt{xy}$, $y+z \ge 2\sqrt{yz}$, $z+x \ge 2\sqrt{zx}$

Suy ra: $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=xyz \le \dfrac{x+y}{2}.\dfrac{y+z}{2}.\dfrac{z+x}{2}=abc$

Bài 13. Cho *a, b, c* >0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \ge a+b+c$$

• Theo (1c) ta có: $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2 \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b}{2}$.

Tương tự: $\dfrac{b^2+c^2}{b+c} \ge \dfrac{b+c}{2}$, $\dfrac{c^2+a^2}{c+a} \ge \dfrac{c+a}{2}$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 14. Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

• Theo (6) ta có : $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.

Tương tự: $\dfrac{b+c}{b^2+c^2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$, $\dfrac{c+a}{c^2+a^2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 15. Cho *a, b* > 0 thoả mãn $a+b=1$. Chứng minh rằng: $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \ge \dfrac{25}{2}$ (*)

• Từ (1d) ta có: $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

Suy ra:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 \ge \frac{5^2}{2}$$

Bài 16. Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} \le \dfrac{a+b+c}{2}$

• Từ (4) ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \Rightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \frac{1}{4}(a+b)$.

Tương tự: $\dfrac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{1}{4}(b+c)$, $\quad \dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} \le \frac{1}{4}(c+a)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 17. Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge \frac{15}{2}$

Theo (2) ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$.

$$M=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right) \ge 2+2+2=6$$

$$N=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)\left(\frac{b}{c+a}+1\right)\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right]-3 \ge \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

Suy ra: $M+N \ge 6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 18. Cho 2 số dương *a, b* thoả $a+b=1$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2} \ge 6$ $\qquad$ *b)* $\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2} \ge 14$

• a) Từ (3) ta có $4ab \le (a+b)^2 \Rightarrow 4ab \le 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} \ge 4$ (vì *a, b* > 0)

Từ (4) ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$

Suy ra: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right) \ge \frac{1}{2}.4+\frac{4}{(a+b)^2}=6$

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

b) Tương tự như trên ta có

$$\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}=\frac{4}{2ab}+\frac{3}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+3\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\geq\frac{1}{2}.4+3.\frac{4}{(a+b)^2}=2+12=14$$

Bài 19. Cho *a, b, c, d* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4$

- Sử dụng công thức (4) ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$.

Suy ra: $\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)\geq(a+c)\frac{4}{a+b+c+d}$

Tương tự: $\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}\geq(b+d)\frac{4}{a+b+c+d}$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 20. Cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4\geq 2$.

- Từ (1c) ta có: $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2=4 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2$.

và $2(a^4+b^4)\geq(a^2+b^2)^2\geq 2^2=4$

Suy ra: $a^4+b^4\geq 2$ (đpcm)

Bài 21. Cho $|a|\leq 1, |b|\leq 1, |a+b|=\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

A = $\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}$ (Đề thi vào lớp 10 THPT Hải Dương)

- Ta có : A= $\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}\geq 0$

Xét $A^2=1-a^2+1-b^2+2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leq 2-(a^2+b^2)+1-a^2+1-b^2$

$=4-2(a^2+b^2\leq 4-(a+b)^2=1$

$\Rightarrow |A|\leq 1 \Rightarrow -1\leq A\leq 1$

A = 1 khi $a = b \Leftrightarrow |2a|=\sqrt{3}\Leftrightarrow 4a^2=3\Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy maxA = 1 khi $a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $a=b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 22. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{2x^2}{1+x^2}=y & (a)\\ \frac{2y^2}{1+y^2}=z & (b)\\ \frac{2z^2}{1+z^2}=x & (c)\end{cases}$$

- Từ hệ phương trình ta suy ra được: *x, y, z* ≥ 0.

Ta có: $1+x^2\geq 2x \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2}\leq 1 \Rightarrow y=\frac{2x^2}{1+x^2}\leq x$

Tương tự: $z=\dfrac{2y^2}{1+y^2}\le y$, $\quad x=\dfrac{2z^2}{1+z^2}\le z$.

Như vậy: $x\le z\le y\le x \Rightarrow x=y=z$.

Do đó (a) $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{1+x^2}=x \Leftrightarrow x^3-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm: (0; 0; 0) hoặc (1; 1; 1).

VẤN ĐỀ VII:
BẤT ĐẲNG THỨC VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT.

1. Độ dài véctơ.

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy*, véctơ $\vec{u}=(x;y)$ có độ dài là:

$$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, véctơ $\vec{u}=(x;y;z)$ có độ dài là:

$$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2. Các phép toán véctơ biểu thị qua tọa độ.

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, hai véctơ $\vec{u}=(x_1;y_1)$; $\vec{v}=(x_2;y_2)$.

Khi đó ta có

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$; $\quad \vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$; $\quad k\vec{u}=(kx_1;ky_1)\quad (k\in\mathbb{R})$

$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$; $\quad \vec{u}.\vec{v}=x_1.x_2+y_1.y_2$

Chú ý: Trong không gian các phép toán giữa các véctơ tương tự như trong mặt phẳng.

3. Bất đẳng thức véctơ.

Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ (trong mặt phẳng hoặc không gian). Khi đó ta có:

- $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (1). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

  Tổng quát: $\left|\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i|$ (*n* nguyên dương).
- $|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (2). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.
- $-|\vec{a}|.|\vec{b}|\le\vec{a}.\vec{b}\le|\vec{a}|.|\vec{b}|$ (3). Dấu "=" thứ nhất xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.

  Dấu "=" thứ hai xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

II. ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC VÉCTƠ.

1. Ứng dụng để giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.

1.1. Phương pháp: Ta biến đổi phương trình đã cho sau đó xét các véctơ có tọa độ thích hợp rồi áp dụng một trong ba BĐT véctơ trên và xét trường hợp dấu bằng xảy ra để đưa ra nghiệm của phương trình đã cho.

1.2. Ví dụ.

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $\quad x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{x^2+1}=0 \quad$ (1.1)

- Điều kiện: $-1\le x\le 3$

Khi đó ta có (1.1) $\Leftrightarrow x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$

Xét hai véctơ $\vec{u}=(x;1);\ \vec{v}=(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x})$

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x};\quad |\vec{u}|.|\vec{v}|=2\sqrt{x^2+1}$

Mà theo BĐT (3) ta có $\vec{u}.\vec{v}\le|\vec{u}|.|\vec{v}|\Leftrightarrow x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\le 2\sqrt{x^2+1}$

Vì $\vec{u},\ \vec{v}\ne\vec{0}$ nên dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 3\\ x^2(3-x)=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1-\sqrt{2}\\ x=1+\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$ (1.2)

- Phương trình đã cho xác định với mọi x.

Ta có (1.2) $\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{(x+1)^2+9}=\sqrt{29}$

Xét hai véctơ $\vec{u}=(x-1;2);\ \vec{v}=(-x-1;3)$.

Khi đó $\vec{u}+\vec{v}=(-2;5);\ |\vec{u}|=\sqrt{x^2-2x+5};\ |\vec{v}|=\sqrt{x^2+2x+10};\ |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{29}$

Mà theo BĐT (1) ta có $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}\le\sqrt{29}$

Vì $\vec{u},\ \vec{v}\ne\vec{0}$ nên dấu "=" xảy ra $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{-x-1}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$

Vậy phương trình (1.2) có một nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=m$ (1.3)

- Điều kiện: $2\le x\le 4$.

Xét hai véctơ $\vec{u}=\left(\sqrt{x-2};\sqrt{4-x}\right);\ \vec{v}=(1;1)$.

Ta có $|\vec{u}|=\sqrt{2};\ |\vec{v}|=\sqrt{2};\ \vec{u}.\vec{v}=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$

Mà theo BĐT (3) ta có $|\vec{u}.\vec{v}|\le|\vec{u}|.|\vec{v}|\ \Leftrightarrow\ \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$.

Suy ra phương trình (1.3) có nghiệm $\Leftrightarrow 0<m\le 2$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}x+y+z=3\\ x^2+y^2+z^2=3\\ x^3+y^3+z^3=3\end{cases}$ (1.4)

- Ta xét hai véctơ $\vec{u}=(x;y;z);\ \vec{v}=(1;1;1)$

Khi đó ta có $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3};\ |\vec{v}|=\sqrt{3};\ \vec{u}.\vec{v}=x+y+z=3$

Từ trên ta thấy $|\vec{u}.\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|\ \Leftrightarrow\ \vec{u},\ \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}>0\Leftrightarrow x=y=z>0$

Kết hợp với hệ đã cho ta có nghiệm duy nhất của hệ (1.4) là $x=y=z=1$.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình sau: $\sqrt{x-1}+x-3\ge\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$ (1.5)

- Điều kiện: $x\ge 1$.

Xét hai véctơ $\vec{u}=(x-3;\sqrt{x-1});\ \vec{v}=(1;1)$

Khi đó ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(x-3)^2 + x - 1}$; $|\vec{v}| = \sqrt{2}$; $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{x-1} + x - 3$

Từ trên và bất phương trình (1.5) ta thấy $\vec{u}.\vec{v} \ge |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (*)

Mà theo BĐT (3) ta có $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \text{ (Vì } \vec{u}, \vec{v} \ne \vec{0}\text{)}.$$

Vậy $x = 5$ là nghiệm duy nhất của bất phương trình (1.5).

1.3. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{4x^2 + 12x + 25} = \sqrt{9x^2 + 12x + 29}$

Bài 2. Giải phương trình sau: $\cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x} + \cos x\sqrt{2 - \cos^2 x} = 3$

Bài 3. Giải bất phương trình sau: $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \le 12$

Bài 4. Giải bất phương trình sau: $\sqrt{5 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{5 + 4\sqrt{x}} \ge 4$

Bài 5. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{1+x+y} + \sqrt{3-x-y} = 2\sqrt{(x+y)^2+1} \\ x + y \ge \sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Bài 6. Chứng minh rằng hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7} \end{cases}$$

Bài 7. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3 \end{cases}$$

Bài 8. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + ... + \sqrt{1+x_{2008}} = 2008\sqrt{\dfrac{2009}{2008}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + ... + \sqrt{1-x_{2008}} = 2008\sqrt{\dfrac{2007}{2008}} \end{cases}$$

2. Ứng dụng trong bài toán chứng minh bất đẳng thức.

2.1. Phương pháp: Ta biến đổi BĐT đã cho sau đó xét các véctơ có tọa độ thích hợp rồi áp dụng một trong ba BĐT véctơ trên và xét trường hợp dấu bằng xảy ra để chứng minh BĐT đã cho.

2.2. Ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \ge 2 \quad (2.1)$$

• Xét hai véctơ $\vec{u} = (2\cos x\cos y;\sin(x-y))$; $\vec{v} = (2\sin x\sin y;\sin(x-y))$

Khi đó ta có $|\vec{u}| = \sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)}$; $|\vec{v}| = \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)}$

$\vec{u}+\vec{v} = (2\cos(x-y);2\sin(x-y))$; $|\vec{u}+\vec{v}| = 2$

Mà theo BĐT (1) ta có :

$$|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2(x-y)}+\sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2(x-y)} \ge 2$$

Vậy BĐT (2.1) được chứng minh.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2} \ge \sqrt{y^2+yz+z^2} \qquad (2.2)$$

• Ta có (2.2) $\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}z\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \ge \sqrt{y^2+yz+z^2}$

Xét hai véctơ $\vec{u} = \left(x+\frac{1}{2}y;\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$; $\vec{v} = \left(-x-\frac{1}{2}z;\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

Khi đó ta có $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+xy+y^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+xz+z^2}$

$\vec{u}+\vec{v} = \left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z;\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$; $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{y^2+yz+z^2}$

Mà theo BĐT (1) ta có:

$$|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2} \ge \sqrt{y^2+yz+z^2}$$

Vậy BĐT (2.2) được chứng minh.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương *a, b, c* thoả mãn $ab+bc+ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{c^2+2a^2}}{ca} \ge \sqrt{3}$$

• Ta có:

$$\frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{c^2+2a^2}}{ca} \ge \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{c^2}} \ge \sqrt{3}$$

Xét ba véctơ $\vec{u} = \left(\frac{1}{b};\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$; $\vec{v} = \left(\frac{1}{c};\frac{\sqrt{2}}{b}\right)$; $\vec{w} = \left(\frac{1}{a};\frac{\sqrt{2}}{c}\right)$

Khi đó ta có $\vec{u} = \frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{ab}$; $\vec{v} = \frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}$; $|\vec{w}| = \frac{\sqrt{c^2+2a^2}}{ca}$

$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{\sqrt{2}}{b}+\frac{\sqrt{2}}{c}\right)$; $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} = \sqrt{3}$

(Vì $ab+bc+ca = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$)

Mà theo BĐT (1) ta có:

$$|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}| \ge |\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{c^2+2a^2}}{ca} \ge \sqrt{3}$$

Vì $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ne \vec{0}$ nên dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng hướng $\Leftrightarrow a = b = c$

Mà $ab+bc+ca=abc$ suy ra $a=b=c=3$.

Vậy BĐT (2.3) được chứng minh và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=3$.

2.3. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Chứng minh rằng $\forall x,y,z\in \mathbb{R}_+^*$ ta có:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}\ \ge \sqrt{3}(x+y+z)$$

Bài 2. Chứng minh rằng $\forall a,b,c,d\in \mathbb{R}$ ta có:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Bài 3. Chứng minh rằng $\forall x,y\in \mathbb{R}$ ta có:

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|\le \frac{1}{2}$$

Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a,b,c,x,y,z\in \mathbb{R}$ ta có:

a) $|ax+by+cz|\le \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2}$

c) $\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{a^2-\sqrt{3}a+1}\ge \sqrt{2}$

Bài 5. Chứng minh rằng $\forall x,y,z>0,\ x+y+z\le 1$ ta có:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}}\ge \sqrt{82}$$ (Đề thi ĐH năm 2003)

Bài 6. Cho ba số thực x,y,z đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}+\frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+z^2}}>\frac{|z-x|}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{1+x^2}}$$

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi số thực *a, b* ta luôn có:

a) $\sqrt{a^2+b^2-2a-2b+37}+\sqrt{a^2+b^2+6a-6b+18}\ge 5$

b) $\sqrt{a^2+4}+\sqrt{a^2-2a+b^2+1}+\sqrt{b^2-6b+10}\ge 5$

Bài 8. Chứng minh rằng $\forall a,b,c\in \mathbb{R}$ ta có:

$$\sqrt{a^2+2a+5}+\sqrt{a^2-2ab+b^2+1}+\sqrt{b^2-2bc+c^2+1}$$
$$+\sqrt{c^2-2cd+d^2+1}+\sqrt{d^2-10d+26}\ge 6\sqrt{2}$$

Bài 9. Chứng minh rằng $\forall a,b,c\in \mathbb{R}$, $abc=1$ ta có:

$$\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ca}{b^2c+b^2a}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}\ge \frac{3}{2}$$ (Đề thi ĐH NNI_2000)

Bài 10. Cho $x,y,u,v\in \mathbb{R}$: $u^2+v^2=x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng:

$$|u(x-y)+v(x+y)|\ge \sqrt{2}$$

Bài 11. Chứng minh rằng $\forall x,y\in \mathbb{R}$ ta có:

a) $\sqrt{\cos^4 x+\cos^4 y+\sin^2 x+\sin^2 y}\ge \sqrt{2}$

b) $\left|\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}\right|\le 3$

Bài 12. Chứng minh rằng $\forall a,b\ge c\ge 0$ ta có: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le \sqrt{ab}$

Bài 13. Chứng minh rằng $\forall a,b,c\in \mathbb{R}$ ta có:

a) $a^2+b^2+c^2 \ge abc(a+b+c)$ b) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Bài 14. Chứng minh rằng $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ thoả mãn $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=16 \end{cases}$ ta có: $xy+yz+zx \le 8$

Bài 15. Cho $2 \le n \in \mathbb{N}; a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}$$

Bài 16*. Chứng minh rằng $\forall x \in [0;1]$ ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x} \le \sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$

Bài 17*. Chứng minh rằng $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{2009+a^2}.\sqrt{2009+b^2}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{2009+b^2}.\sqrt{2009+c^2}} \ge \frac{|c-a|}{\sqrt{2009+c^2}.\sqrt{2009+a^2}}$$

Bài 18*. Cho n số thực $a_1,a_2,...,a_n$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(1-a_1)^2+1}+\sqrt{(a_1-a_2)^2+1}+...+\sqrt{(a_{n-1}-a_n)^2+1}+\sqrt{(n+2-a_n)^2+1} \ge (n+1)\sqrt{2}$$

3. Ứng dụng trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

3.1. Phương pháp: Phương pháp chủ yếu là ta xét các véctơ có tọa độ thích hợp rồi sử dụng một trong ba BĐT véctơ trên để tìm giá trị lớn nhất, giái trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

3.2. Ví dụ.

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}$$

• TXĐ: $\mathbb{R}$

Ta có $f(x)=\sqrt{\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

Xét hai véctơ $\vec{u}=\left(-x+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{v}=\left(x+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Khi đó ta có $|\vec{u}|=\sqrt{x^2-x+1}$; $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+x+1}$; $\vec{u}+\vec{v}=(1;\sqrt{3})$; $|\vec{u}+\vec{v}|=2$

Mà theo BĐT (1) ta có $|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow f(x) \ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = 0.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số f*(x)* đã cho là 2 đạt được tại $x = 0$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+5}+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+8}$$

• TXĐ: $\mathbb{R}$

Xét hai véctơ $\vec{u}=(1-\cos x;2)$; $\vec{v}=(2+\cos x;2)$

Khi đó: $|\vec{u}|=\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+5}$; $|\vec{v}|=\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+8}$; $\vec{u}+\vec{v}=(3;4)$; $|\vec{u}+\vec{v}|=5$

Mà theo BĐT (1) ta có $|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow f(x) \ge 5$

Dấu "=" xảy $\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ hoặc $x=-\frac{2\pi}{3}+l2\pi\ (l \in \mathbb{Z})$

Vậy min *f(x)* = 5 đạt được tại $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ hoặc $x = -\frac{2\pi}{3} + l2\pi \ (l \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left[2000\pi; 2002\pi\right]$ của hàm số

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 6\cos x + 10} + \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 2}$$

• TXĐ: $\mathbb{R}$

Xét hai véctơ $\vec{u} = (3 - \cos x; 1)$; $\vec{v} = (\cos x + 1; 1)$

Khi đó ta có $|\vec{u}| = \sqrt{\cos^2 x - 6\cos x + 10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 2}$; $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{20}$

Mà theo BĐT (1) ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow f(x) \geq \sqrt{20}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Xét trên đoạn $\left[2000\pi; 2002\pi\right]$ ta có k = 1000; 1001 tương ứng với $x = 2000\pi; 2002\pi$

Vậy trên đoạn $\left[2000\pi; 2002\pi\right]$ thì min*f(x)* $= \sqrt{20}$ đạt được tại $x = 2000\pi$ hoặc $x = 2002\pi$.

3.3.Bài tập tự luyện.

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = A\sin x + B\cos x \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên.

b) Dùng câu a), chứng minh rằng $\left|\frac{\cos 3x + a\cos 3x + 1}{2\cos 3x}\right| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}, \quad \forall x, a \in \mathbb{R}$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 12y + 37} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 6y + 18}$$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau:

$$f(x) = \left|\sqrt{(x+6)^2 + 100} + \sqrt{(x+1)^2 + 4}\right|$$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2} \ (p \neq q)$$

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (c - x)^2}$$

VẤN ĐỀ VIII:
SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Trong phần này ta sử dụng đạo hàm thông qua việc xét tính đơn điệu của hàm số hoặc dùng định lý Lagrage để chứng minh bất đẳng thức, đặc biệt là bất đẳng thức có một biến số.

LOẠI 1. SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $e^x > 1 + x$ với $x \neq 0$

• Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1$ liên tục và khả vi với mọi $x \neq 0$

Ta có: $f'(x) = e^x - 1$, $f(0) = 0$

+ Nếu $x > 0$ thì $f'(x) = e^x - 1 > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến

$\Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; e^x > 1 + x \quad (1)$

+ Nếu $x < 0$ thì $f'(x) = e^x - 1 < 0 \;\Rightarrow f(x)$ nghịch biến

$\Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; e^x > 1 + x \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow\; e^x > 1 + x$ với $x \neq 0$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ đúng với mọi $x > 0$

• YCBT $\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2}{2} + x + 1 - e^x < 0,\ \forall x > 0$

Xét $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + 1 - e^x$. Ta có $f'(x) = x + 1 - e^x$, $f''(x) = 1 - e^x < 0$, $\forall x > 0$

Do đó $f'(x)$ nghịch biến trong $(0;+\infty) \Rightarrow\; f'(x) < f'(0) = 0$ với $\forall x \in (0;+\infty)$

$\Rightarrow\; f(x)$ nghịch biến trong $(0;+\infty) \Rightarrow f(x) < f(0) = 0$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{2} + x + 1 - e^x < 0$, $\forall x > 0$ hay $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ với $\forall x > 0$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ với $x > 0$

• BĐT $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < x & (a) \\ x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x & (b) \end{cases}$ với $x > 0$

a) Ta chứng minh $\sin x < x$ với $x > 0$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x$. $f(0) = 0$

Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 \le 0$, $\forall x \in (0;+\infty) \;\Rightarrow\; f(x)$ nghịch biến trong $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x) < f(0)$ với $x > 0 \Rightarrow \sin x - x < 0$ với $x > 0$

b) Ta chứng minh $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x$ với $x > 0$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$. Ta có $f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} = g(x)$

$\Rightarrow\; g'(x) = -\sin x + x > 0$ với $x > 0 \Rightarrow g(x)$ đồng biến $\Rightarrow\; g(x) > g(0) = 0$ với $x > 0$

hay $f'(x) > 0$ với $x > 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ đồng biến $\Rightarrow\; f(x) > f(0) = 0$ với $x > 0$

$\Rightarrow \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} > 0$ hay $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x$ với $x > 0$

Từ a) và b) $\Rightarrow\; x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ với $x > 0$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \;\ge\; 2^{x+1}$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

• Áp dụng BĐT Cô–si: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2.\sqrt{2^{\sin x}.2^{\tan x}} \;=\; 2.2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}} \;= 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2} + 1}$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{\sin x}+2^{\tan x} \;\geq\; 2^{\frac{\sin x+\tan x}{2}+1}$$

YCBT $\Leftrightarrow\ 2^{\frac{\sin x+\tan x}{2}+1} \geq 2^{x+1} \Leftrightarrow\ \dfrac{\sin x+\tan x}{2}+1 \geq x+1$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x+\tan x \geq 2x \quad \text{với} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

Xét hàm số $f(x)=\ \sin x+\tan x-2x$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $\quad f(0)=0$

Ta có: $f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2>\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2 \overset{Co-si}{\geq} 2.\sqrt{\cos^2 x.\dfrac{1}{\cos^2 x}}.-2 \;=0$

(vì $\cos x>\cos^2 x$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow\ f'(x)\geq 0\ \Rightarrow f(x)$ đồng biến $\Rightarrow\ f(x)>f(0)$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\ \sin x+\tan x-2x>0 \Rightarrow \sin x+\tan x\geq 2x$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $\quad 2^{2.\sin x}+2^{\tan x}>2^{\frac{3}{2}x+1}$ $\quad$ với $0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$

- Xét hàm số $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\tan x-\dfrac{3x}{2}$ với $0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$

Ta có $f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{2.\cos^2 x}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{1}{2.\cos^2 x}-\dfrac{3}{2}$

$$\overset{Co-si}{\geq} 3.\sqrt[3]{\frac{\cos x}{2}.\frac{\cos x}{2}.\frac{1}{\cos^2 x}}-\frac{3}{2}=0$$

$\Rightarrow\ f'(x)\geq 0,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow\ f(x)$ đồng biến trong $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow\ f(x)\geq f(0) \Rightarrow\ \sin x+\dfrac{1}{2}\tan x-\dfrac{3x}{2}\geq 0,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin x+\dfrac{1}{2}\tan x\geq\dfrac{3x}{2},\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ x=0$

Mà $2^{2.\sin x}+2^{\tan x}\geq 2.\sqrt{2^{2\sin x}.2^{\tan x}}=2.2^{\sin x+\frac{1}{2}\tan x}\geq 2.2^{\frac{3x}{2}}$

$\Rightarrow\ 2^{2\sin x}+2^{\tan x}\geq 2^{1+\frac{3x}{2}},\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right).$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ \begin{cases}x=0\\2\sin x=\tan x\end{cases} \Leftrightarrow\ x=0$.

Do đó $\quad 2^{2.\sin x}+2^{\tan x}>2^{\frac{3}{2}x+1}$ $\quad$ với $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 6. Cho $0 < \alpha \le \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng $2.\alpha + \frac{1}{\alpha^2} > 3$

• Xét hàm số $f\left(x\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$ trên $\left(0;\frac{3}{4}\right]$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{59}{18}$

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3} < 0$ với $\forall x \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên $\left(0;\frac{3}{4}\right]$ $\Rightarrow f(x) \ge f\left(\frac{3}{4}\right)$, $\forall x \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow f\left(\alpha\right) \ge f\left(\frac{3}{4}\right)$, $\forall \alpha \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow 2\alpha + \frac{1}{\alpha^2} \ge \frac{59}{18} > 3$ Hay $2.\alpha + \frac{1}{\alpha^2} > 3$, $\forall \alpha \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với $0 < a < \sqrt[3]{b} < a+1$ thì :

$$\frac{a.(a^3+2.b)}{2.a^3+b} < \sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)\left[(a+1)^3+2.b\right]}{2.(a+1)^3+b}$$

• Xét hàm số $f(x) = \frac{x(x^3+2.b)}{2.x^3+b}$ với $0 < a < x < a+1$

Ta có $f\left(\sqrt[3]{b}\right) = \sqrt[3]{b}$ và $f'(x) = \frac{2.(x^3-b)^2}{(2.x^3+b)^2} \ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(a) < f\left(\sqrt[3]{b}\right) < f(a+1)$ với $0 < a < x < a+1$

$\Rightarrow \frac{a.(a^3+2.b)}{2.a^3+b} < \sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)\left[(a+1)^3+2.b\right]}{2.(a+1)^3+b}$ (đpcm).

Ví dụ 8. Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $a.\sin a - b.\sin b > 2.(\cos b - \cos a)$

• YCBT $\Leftrightarrow a.\sin a + 2\cos a > b.\sin b + 2.\cos b$

Xét hàm số $f(x) = x.\sin x + 2.\cos x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có: $f'(x) = \sin x + x.\cos x - 2.\sin x$, $f'(0) = 0$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x.\sin x - 2.\cos x = -x.\sin x$

$\Rightarrow f''(x) < 0$ (vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x > 0$). Do đó $f'(x) < f'(0) = 0$ khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow f(a) > f(b)$ với $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow a.\sin a + 2\cos a > b.\sin b + 2.\cos b$ hay $a.\sin a - b.\sin b > 2.(\cos b - \cos a)$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng: $4.\tan 5^0.\tan 9^0 < 3.\tan 6^0.\tan 10^0$

• Xét hàm số $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ với $0 < x < \frac{\pi}{4}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{2.x-\sin 2x}{2.x^2\cos^2 2x}>0$ (vì ta đã có $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$ nếu $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Với 5 < 6 thì $f(5)<f(6)$ $\Rightarrow$ $f\left(\dfrac{5\pi}{180}\right)<f\left(\dfrac{6\pi}{180}\right)$,

tức là $\dfrac{\tan\frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}}<\dfrac{\tan\frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}}$ $\Rightarrow$ $6.\tan 5^0<5.\tan 6^0$ (2)

Chứng minh tương tự ta cũng có $10.\tan 9^0<9.\tan 10^0$ (3)

Nhân (2) và (3), vế theo vế, ta được $4.\tan 5^0.\tan 9^0<3.\tan 6^0.\tan 10^0$ (đpcm).

Ví dụ 10. Cho $x\ge y\ge z>0$. Chứng minh: $\dfrac{x^2.y}{z}+\dfrac{y^2.z}{x}+\dfrac{z^2.x}{y}\ge x^2+y^2+z^2$

• BĐT $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^3.y^2+z^2.y^3+x^2.z^3}{x.y.z}\ge x^2+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^3.y^2+z^2.y^3+x^2.z^3}{y}\ge xz(x^2+y^2+z^2)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{z^2}{y^2}+\dfrac{z^3}{y^3}.\dfrac{x^2}{y^2}\ge\dfrac{x}{y}.\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{z^2}{y^2}+1\right)$

Đặt $u=\dfrac{x}{y}$, $v=\dfrac{z}{y}$. Ta có $u\ge 1\ge v>0$.

Nên BĐT có dạng $u^3+v^2+u^2.v^3\ge u.v(u^2+v^2+1)$

$\Leftrightarrow u^3(1-v)+u^2.v^3-u.v(1+v^2)+v^2\ge 0$ (1)

+ Nếu $v=1$ thì (1) có dạng $u^2-2.u+1\ge 0$, tức là (2) đúng

+ Nếu $0<v<1$. Xét hàm số $f(u)=u^3(1-v)+u^2.v^3-u.v(1+v^2)+v^2$ với $u\ge 1$

Ta có $f'(u)=3.u^2(1-v)+2.u.v^3-v(1+v^2)$

$f''(u)=6.u(1-v)+2.v^3>0$ (do $0<v<1$ và $u\ge 1$)

$\Rightarrow$ $f'(u)$ đồng biến khi $u\ge 1$ nên với mọi $u\ge 1$ ta có $f'(u)\ge f'(1)$

Mà $f'(1)=v^3-4.v+3=(v-1)(v^2+v-3)>0$ nên $f'(u)\ge 0\Rightarrow$ *f (u)* đồng biến khi $u\ge 1$

Tức là $\forall u\ge 1$ ta có $f(u)\ge f(1)=v^2-2v+1=(v-1)^2>0$

Vậy: $u^3(1-v)+u^2v^2-u^2v^3-uv(1+v^2)+v^2\ge 0$ với $\forall u\ge 1>v>0$

Hay $\dfrac{x^2.y}{z}+\dfrac{y^2.z}{x}+\dfrac{z^2.x}{y}\ge x^2+y^2+z^2$ với $x\ge y\ge z>0$ (đpcm).

Ví dụ 11. Chứng minh $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ với mọi $x>0$

• a) Chứng minh $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$, $\forall x>0$

Xét $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0,\ x>0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến với mọi $x>0$

$\Rightarrow \ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}>0$, $x>0$ $\Rightarrow x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ với mọi $x>0$

b) Chứng minh $\ln(1+x)<x,\ x>0$

Đặt g $g(x)=x-\ln(1+x)$ với $x>0$, $g(0)=0$

$\Rightarrow g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$, khi $x>0$

$\Rightarrow g(x)>0$,$\forall x>0 \Rightarrow x-\ln\left(1+x\right)>0,$ khi $x>0 \Rightarrow \ln\left(1+x\right)<x$, với $x>0$

Từ a), b) $\Rightarrow$ $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, với mọi $x>0$

Ví dụ 12. Chứng minh rằng $x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x$ với $x>0$

• Do $x>0$ nên $x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x \Leftrightarrow 1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1,\ \forall x>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>1-\dfrac{x}{2}\end{cases}$

a) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1,\quad \forall x>0$

Vì $x>0$ nên $x+1>1 \Rightarrow \sqrt{x+1}>1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1$

b) Chứng minh $1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}},\quad \forall x>0$

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{x}{2}-1$, $x>0$, $\qquad g\left(0\right)=0$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}\right]>0$, với $x>0 \Rightarrow$ g(x) đồng biến với $x>0$

$\Rightarrow g(x)>g(0)=0$ với $\forall x>0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{x}{2}-1>0,\ \forall x>0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}},\quad \forall x>0$

Vậy $1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1 \Leftrightarrow x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x$, $\forall x>0$

Ví dụ 13. Chứng minh rằng: $(\sin x)^{-2}\le x^{-2}+1-\dfrac{4}{\pi^2}$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

• YCBT $\Leftrightarrow (\sin x)^{-2}-x^{-2}\le 1-\dfrac{4}{\pi^2}$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

Xét hàm số $f(x)=(\sin x)^{-2}-x^{-2}$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Ta có $f'(x) = -2(\sin x)^{-3}.\cos x + 2.x^{-3} > 0$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2.x^{-3} > 2.(\sin x)^{-3}.\cos x \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{x^3} > \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} \;\Rightarrow\; x < \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0$

$\Rightarrow \sin x.\left(\cos x\right)^{-\frac{1}{3}} - x > 0$

Đặt $g(x) = \sin x.(\cos x)^{-\frac{1}{3}} - x \;\Rightarrow g'(x) = (\cos x)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{4}{3}}.\sin^2 x - 1$, $g'(0) = 0$

$\Rightarrow\; g''(x) = \dfrac{4}{9}(\cos x)^{\frac{-2}{3}}.\sin^2 x$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow g''(x) > g''(0) = 0$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow g'(x)$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) \le f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{-2} = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$ với $\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Do đó $\left(\sin x\right)^{-2} - x^{-2} \le 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$ Hay $\left(\sin x\right)^{-2} \le x^{-2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$ $\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 14. Cho 3 số *a, b, c* > 0 thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{3.\sqrt{3}}{2} \qquad (*)$$

• Từ giả thiết $\Rightarrow b^2 + c^2 = 1 - a^2$, $c^2 + a^2 = 1 - b^2$ và $a^2 + b^2 = 1 - c^2$

Thay vào (*) ta được:

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2}$$

$$= \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \ge \frac{3.\sqrt{3}}{2}$$

Xét hàm số $f(x) = x(1-x) = -x^3 + x$, $x \in (0;1)$. $f'(x) = -3.x^2 + 1$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in \left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ và $f'(x) < 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right)$

$\Rightarrow \le 0 < f(x) \le f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{3.\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{f(x)} \ge \dfrac{3.\sqrt{3}}{2}$

Do đó $0 < a(1-a^2) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{a(1-a^2)} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \dfrac{a^2}{a(1-a^2)} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}.a^2$

Tương tự $\dfrac{b^2}{b(1-b^2)} \ge \dfrac{3.\sqrt{3}}{2}.b^2$, $\dfrac{c^2}{c(1-c^2)} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}.c^2$

Do đó $\dfrac{a}{b^2+c^2} + \dfrac{b}{c^2+a^2} + \dfrac{c}{a^2+b^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 15. Cho $e \le x_1 \le x_2 \le ..... \le x_n < y_1 \le y_2 \le y_3 \le ...... \le y_m$ và $\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sum_{i=1}^{m} y_{y_i}$.

Chứng minh: $\prod_{i=1}^{n} x_i > \prod_{y=1}^{m} y_i$

- Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \le 0$ khi $x \ge e$

Nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến. Từ giả thiết ta có:

$$\frac{\ln x_1}{x_1} \ge \frac{\ln x_2}{x_2} \ge .... \ge \frac{\ln x_n}{x_n} > \frac{\ln y_1}{y_1} \ge \frac{\ln y_2}{y_2} \ge .... \ge \frac{\ln y_n}{y_n}$$

Từ đó ta có $\ln x_1 > x_{1.}\dfrac{\ln y_1}{y_1}$

$$\ln x_2 > x_{2.}\frac{\ln y_1}{y_1}$$

…………………

$$\ln x_n > x_n.\frac{\ln y_1}{y_1}$$

Hay $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i > \dfrac{\ln y_1}{y_1}.\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \dfrac{\ln y_1}{y_1}.\sum_{i=1}^{m} y_i$ (1)

Mặt khác $\ln y_2 \le y_{2.}.\dfrac{\ln y_1}{y_1}$

$$\ln y_3 \le y_3.\frac{\ln y_1}{y_1}$$

………………

$$\ln y_n \le y_n.\frac{\ln y_1}{y_1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \ln y_i \le \frac{\ln y_1}{y_1}.\sum_{i=1}^{m} y_i \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \ln x_i > \sum_{i=1}^{m} \ln y_i$ hay $\prod_{i=1}^{n} x_i > \prod_{y=1}^{m} y_i$

LOẠI 2: DÙNG ĐỊNH LÝ LAGRANGE

1. Định lý lagrange

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$ thì tồn tại một số $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ với $0 < a < b$

• Xét hàm số : $f(x)=\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x}\ ,\ f'(c)=\frac{1}{c}$

Hàm số $f\left(x\right)=\ln x$ thoả mãn định lý Larange trên $\left[a;b\right]$

$\Rightarrow \exists c\in(a;b):\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{c}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$

Do $\ 0<a<c<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ nên $\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a} \ \Leftrightarrow\ \frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi $x, y\in \mathrm{R}$ ta có: $\left|\sin x-\sin y\right|\le\left|x-y\right|$

• Xét hàm số $f(t)=\sin t$, $\quad f'(t)=\cos t \ \Rightarrow\ f'(c)=\cos c$

Hàm số $f(t)=\sin t$ định lý Lagrange trên $[x;y] \Rightarrow \ \exists c\in(x;y)$ ta có:

$$f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Leftrightarrow \cos c=\frac{\sin y-\sin x}{y-x} \Leftrightarrow \left|\cos c\right|=\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin x-\sin y\right|\le\left|x-y\right|,\ \ \forall x;y\in R$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ với $0<a<b<\frac{\pi}{2}$

• Xét hàm số $f(x)=\tan x$ liên tục và khả vi trên $\left[a;b\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\quad f'(c)=\frac{1}{\cos^2 c}$$

$\Rightarrow\ \exists c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\tan b-\tan a}{b-a}$

$\Rightarrow\ \frac{1}{\cos^2 c}=\frac{\tan b-\tan a}{b-a} \ \Rightarrow\ \tan b-\tan a=\frac{b-a}{\cos^2 c}$.

Do $a<c<b$ và $y=\cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\frac{b-a}{\cos^2 c}<\frac{b-a}{\cos^2 b} \Leftrightarrow \frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b} \quad \text{với } 0<a<b<\frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 4. Cho $x>1$ và $\alpha>1$. Chứng minh rằng: $x^a-1>\alpha(x-1)$

• Xét hàm số $f(t)=t^{\alpha}$ với $1\le t\le x$. Ta có $f'(t)=\alpha.t^{\alpha-1}$

Theo định lý Lagrange thì tồn tại $c\in(1;x)$ thoả mãn $f'(c)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\Rightarrow \alpha.c^{\alpha-1}=\frac{x^{\alpha}-1}{x-1} \ \Rightarrow\ x^{\alpha}-1=(x-1)\alpha.c^{\alpha-1} \ \Rightarrow\ x^a-1>\alpha(x-1)$ (vì $x,\alpha>1$)

Ví dụ 5. Chứng minh rằng: $\ln(x+1)<x$ mọi $x>0$.

• Xét hàm số $f(t)=\ln t$ với $t\in\left[1;1+x\right]$. $f'(t)=\frac{1}{\ln t}$.

Theo định lý Lagrange sẽ tồn tại $c\in(1;1+x)$: $f'(c)=\frac{f(1+x)-f(1)}{(1+x)-1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) = \dfrac{x}{c} < \dfrac{x}{1} = 1$ hay $\ln(x+1) < x$ mọi $x > 0$

Trường hợp gặp bài toán chưa thể vận dụng định lý Lagrange được ngay thì việc chọn hàm số thoả mãn các điều kiện của định lý Lagrange rất quan trọng.

Ví dụ 6. Cho $x > 0$. Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{1+x} > \left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x}$ (1)

• Đây là dạng bài toán chưa thể vận dụng đính lý Lagrănge được ngay.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (1+x)\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right) > x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ với $x > 0$

Xét hàm số $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x\left[\ln(x+1) - \ln x\right]$

$$f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{1+x} \qquad (2)$$

Xét hàm số G$G(t) = \ln(t)$ trên $\left[x; x+1\right]$. Theo định lý Lagrange thì tồn tại $c \in (x; x+1)$

sao cho $G'(c) = \dfrac{G(x+1) - G(x)}{(x+1) - x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln x$

Vì $c < x+1$ nên $\dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \ln(x+1) - \ln x > \dfrac{1}{x+1} \quad \Rightarrow f'(x) > 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[x; x+1\right]$

$\Rightarrow f(x+1) > f(x) \Rightarrow (1+x)\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right) > x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

hay $\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{1+x} > \left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x}$ với $x > 0$.

Ví dụ 7. Cho $n \in Z^+$. Chứng minh rằng: $x^n\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{2ne}}$ với mọi $x \in (0;1)$ (*)

• Ta có: $(*) \Leftrightarrow x^{2n}(1-x) < \dfrac{1}{2ne} \Leftrightarrow x^{2n}2n(1-x) < \dfrac{1}{e}$ với mọi $x \in (0;1)$ (1).

$$x^{2n}2n(1-x) = \underbrace{x.x...x}_{2n}(2n - 2nx) \overset{Co-si}{\leq} \left[\frac{2nx + (2n - 2nx)}{2n+1}\right]^{2n+1} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta sẽ chứng minh: $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} < \dfrac{1}{e}$

$\Leftrightarrow \quad (2n+1)\left[\ln(2n+1) - \ln(2n)\right] > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2n+1) - \ln(2n) > \dfrac{1}{2n+1}$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$ thoả định lý Lagrange trên$\left[2n; 2n+1\right]$.

$\Rightarrow \exists c \in (2n; 2n+1): f'(c) = \dfrac{f(2n+1) - f(2n)}{2n+1-2n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{c} = \ln(2n+1) - \ln(2n)$.

Do $2n < c < 2n+1$ nên $\dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{2n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2n+1) - \ln(2n) > \dfrac{1}{2n+1}$

Vậy $x^n\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{2ne}}$ với mọi $x \in (0;1)$ và $n \in Z^+$.

Ví dụ 8. Cho $0 < a < b,\ n > 1$. Chứng minh rằng:

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a) \qquad (1)$$

• Xét hàm số: $f(x) = x^n,\ x \in [a;b]$. $f'(x) = nx^{n-1}$

Theo định lý Lagrange thì tồn tại $c \in (a;b)$ thoả mãn:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow nc^{n-1} = \frac{b^n - a^n}{b-a} \Leftrightarrow b^n - a^n = n.c^{n-1}(b-a)$$

Nên ta có $(1) \Leftrightarrow na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$

$\Leftrightarrow n.a^{n-1}(b-a) < n.c^{n-1}(b-a) < n.b^{n-1}(b-a)$

$\Leftrightarrow a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$ (vì $n(b-a) > 0$) (2)

Bất đẳng thức (2) đúng vì $0 < a < c < b,\ n > 1$

Vậy (1) đã được chứng minh.